Алгебра

9

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

ФГОС

Алгебра

9 класс

Учебник
для общеобразовательных
организаций

Рекомендовано
Министерством образования и науки
Российской Федерации

Москва
«Просвещение»
2014

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я72
А45

Авторы:
Ю. М. Колягин, М. В. Ткачёва,
Н. Е. Фёдорова, М. И. Шабунин

На учебник получены положительные заключения
Российской академии наук (письмо № 10106-5215/590 от 14.10.2011)
и Российской академии образования (письмо № 01-5/7д-341 от 17.10.2011).

А45 **Алгебра**. 9 класс : учеб. для общеобразоват. организаций /[Ю. М. Колягин, М. В. Ткачёва, Н. Е. Фёдорова, М. И. Шабунин]. — М. : Просвещение, 2014. — 304 с. : ил. — ISBN 978-5-09-031531-9.

Данный учебник является третьей частью комплекта учебников алгебры для 7—9 классов, отвечающих всем требованиям федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования. Изложение учебного материала ведётся на доступном уровне с учётом деятельностного подхода. Основными содержательными линиями курса являются: числовая, уравнений, неравенств, функциональная, алгебраических преобразований, стохастическая, логических высказываний, мировоззренческая. Учебник содержит материал, изложенный в форме занимательных диалогов, развивающий метапредметные умения и личностные качества учащихся.

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я72

ISBN 978-5-09-031531-9

Уважаемые девятиклассники!

В этом учебном году вы продолжите изучать алгебру по учебникам, созданным нашим авторским коллективом. Этот учебник имеет ту же структуру и те же рубрики, что и учебник 8 класса. Поэтому **правила работы с учебником** остаются прежними. Напомним основные из них.

После изучения текста параграфа отвечайте на Устные вопросы: находите ответы на них в тексте, учите определения новых понятий, теоремы, алгоритмы. С помощью Вводных упражнений повторяйте ранее изученное, чтобы было легче усваивать новый материал и выполнять основные упражнения по теме.

Читайте Диалоги об истории, чтобы расширить свой кругозор и понять, откуда и почему появилось в алгебре то или иное понятие, в какие века люди уже знали то, что вам только ещё предстоит узнать. Обращайте внимание на Разговоры о важном. В них вы найдёте ответы на часто задаваемые вопросы, узнаете, каким образом изученные понятия применяются в других областях знаний и на практике.

В разделах Это интересно вы найдёте любопытные сведения о происхождении и использовании полученных знаний. Изучайте материалы разделов Шаг вперёд — с их помощью вы сможете углубить и расширить свои знания по теме.

Если в тексте учебника вы встретите забытый термин, то в предметном указателе в конце учебника посмотрите номер страницы, на которой можно найти его определение.

После изучения каждой главы проверяйте свои знания и умения с помощью задач рубрики Проверь себя! Эти задания разделены на три уровня сложности, как и основные упражнения учебника: обязательный, продвинутый и сложный. Интересующиеся математикой школьники найдут в конце учебника много непростых заданий в разделе Задачи для внеклассной работы. После решения задач и упражнений сверяйте свои ответы с ответами, приведёнными в конце учебника.

Внутри текста используются следующие обозначения:

! — формулировки определений, теорем, правил

‖ — выделение важного материала

1)
2) — порядок действий, алгоритм

▶, ◁ — начало и окончание решения задачи

●, ○ — начало и окончание обоснования утверждения или вывода формулы

17. — обязательные упражнения

43. — дополнительные, более сложные упражнения

$\boxed{85.}$ — трудные упражнения

ГЛАВА I

Степень с рациональным показателем

Вы знакомы с определением степени с натуральным показателем:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}, \quad a^1 = a.$$

При изучении теории приближённых вычислений использовали степени для представления чисел в стандартном виде (например, $0{,}023 = 2{,}3 \cdot 10^{-2}$). Таким образом, вы уже знакомы с некоторыми степенями с отрицательными показателями.

Необходимость возведения чисел не только в натуральные степени возникла в XVI в. в связи с развитием дальнего мореплавания, так как потребовались усовершенствованные астрономические наблюдения и точные вычисления. Лишь к концу XVII в. понятие степени было обобщено до степени с дробным и отрицательным показателями. В окончательном виде теорию степеней сформулировал И. Ньютон.

С возведением чисел в различные степени мы часто сталкиваемся в повседневной жизни, при решении практических задач. Например, при вычислении площадей приходится возводить числа в квадрат, при вычислении объёмов — в третью степень. Сила всемирного тяготения, электростатическое и магнитное взаимодействия, свет и звук ослабевают пропорционально второй степени расстояния. В инженерных расчётах часто встречаются четвёртые и даже шестые степени величин. Яркость раскалённого тела, например, при белом калении растёт пропорционально 12-й степени температуры.

В этой главе вы пройдёте путь математиков XVI—XVII вв., обобщивших понятие степени до степени с рациональным показателем. Познакомитесь с новой формой записи квадратного корня из выражения. Узнаете о существовании корней других степеней и поймёте их взаимосвязь со степенями с рациональными показателями.

§ 1 Степень с целым показателем

Понятие отрицательного числа в арифметике вводилось для того, чтобы операция вычитания $n-m$ была выполнима не только для $n \geqslant m$, но и для $n < m$. Аналогично в алгебре вводится понятие степени с отрицательным показателем для того, чтобы свойство деления степеней $a^n : a^m = a^{n-m}$ было выполнимо и при $n < m$. В этом параграфе будут введены понятия степени с целым отрицательным и нулевым показателями. Знакомые вам свойства степени с натуральным показателем будут обобщены для степени с любым целым показателем.

Нужно вспомнить:

- понятие степени с натуральным показателем;
- свойства степени с натуральным показателем;
- основное свойство дроби;
- стандартный вид числа.

При рассмотрении свойств степени с натуральным показателем отмечалось, что свойство деления степеней

$$a^n : a^m = a^{n-m} \tag{1}$$

справедливо при $n > m$ и $a \neq 0$.

Если $n \leqslant m$, то в правой части равенства (1) показатель степени $n-m$ отрицателен или равен нулю. **Степень с отрицательным и с нулевым показателями** определяют так, чтобы равенство (1) было верно не только при $n > m$, но и при $n \leqslant m$.

Например, если $n=2$, $m=5$, то по формуле (1) получаем $a^2 : a^5 = a^{2-5} = a^{-3}$.

Но $a^2 : a^5 = \frac{a^2}{a^5} = \frac{a^2}{a^2a^3} = \frac{1}{a^3}$. Поэтому считают, что $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$.

Определение 1. Для любого числа a, не равного нулю, и целого отрицательного числа $-n$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Примеры:

1) $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$; 2) $(-3)^{-4} = \frac{1}{(-3)^4} = \frac{1}{81}$; 3) $(0{,}5)^{-3} = \frac{1}{(0{,}5)^3} = \frac{1}{0{,}125} = 8$.

Если $n = m$, то по формуле (1) получаем $a^n : a^n = a^{n-n} = a^0$.

С другой стороны, $a^n : a^n = \frac{a^n}{a^n} = 1$. Поэтому считают, что $a^0 = 1$.

! Определение 2. Для любого числа a, не равного нулю,

$$a^0 = 1.$$

Например, $3^0 = 1$, $\left(-\frac{2}{5}\right)^0 = 1$.

Степени с отрицательными показателями уже использовались при записи чисел в стандартном виде.

Например: $0{,}00027 = 2{,}7 \cdot \frac{1}{10^4} = 2{,}7 \cdot 10^{-4}$.

Все свойства степени с натуральным показателем справедливы и для степени с любым целым показателем.

Свойства Для любых $a \neq 0$, $b \neq 0$ и любых целых n и m справедливы равенства:

1. $a^n a^m = a^{n+m}$
2. $a^n : a^m = a^{n-m}$
3. $(a^n)^m = a^{nm}$
4. $(ab)^n = a^n b^n$
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Докажем, например, справедливость равенства $(ab)^n = a^n b^n$ при $n < 0$.

Пусть n — целое отрицательное число. Тогда $-n = k$, где k — натуральное число. Используя определение степени с отрицательным показателем и свойства степени с натуральным показателем, получаем

$$(ab)^n = (ab)^{-k} = \frac{1}{(ab)^k} = \frac{1}{a^k b^k} = \frac{1}{a^k} \cdot \frac{1}{b^k} = a^{-k} b^{-k} = a^n b^n. \ \bigcirc$$

Аналогично доказываются и другие свойства степени с целым показателем. Приведём примеры применения свойств степени с целым показателем:

$$4^{-3} \cdot 4^{11} \cdot 4^{-6} = 4^{-3+11} \cdot 4^{-6} = 4^{-3+11-6} = 4^2 = 16;$$

$$\left(\frac{p^{-3}}{3q^2}\right)^{-2} = \frac{p^{-3 \cdot (-2)}}{3^{-2} \cdot q^{2 \cdot (-2)}} = \frac{3^2 p^6}{q^{-4}} = 9p^6 q^4, \text{ где } p \neq 0,\ q \neq 0.$$

Задача. Упростить выражение $a^6 (a^{-2} - a^{-4}) (a^2 + a^3)^{-1}$, где $a \neq 0$.

► $a^6 (a^{-2} - a^{-4}) (a^2 + a^3)^{-1} = a^6 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{a^4}\right) \frac{1}{a^2 + a^3} = a^6 \cdot \frac{a^2 - 1}{a^4} \cdot \frac{1}{a^2 (1 + a)} =$

$= a - 1$. ◁

Устные вопросы и задания

1. Сформулировать определение степени a^{-n}, где $a \neq 0$ и n — натуральное число.
2. Дать определение степени a^0, если $a \neq 0$.
3. Перечислить свойства степени с целым показателем.
4. Что называют записью числа в стандартном виде?

Вводные упражнения

1. Представить в виде степени ($b \neq 0$):

   1) $a^2 \cdot a^7$; 2) $b^{10} : b^4$; 3) $(c^5)^2$; 4) $a^6 b^6$; 5) $\frac{a^8}{b^8}$.

2. Записать с стандартном виде число:
   1) 2400; 2) 38; 3) 56 700; 4) 10.

Упражнения

1. Вычислить:
1) $2^3 + (-3)^3 - (-2)^2 + (-1)^5$; 2) $(-7)^2 - (-4)^3 - 3^4$;
3) $13 \cdot 2^3 - 9 \cdot 2^3 + 2^3$; 4) $6(-2)^3 - 5(-2)^3 - (-2)^3$.

Представить выражение в виде степени с натуральным показателем (2—3):

2. 1) $\frac{7^2 \cdot 7^{15}}{7^{13}}$; 2) $\frac{5^3 \cdot 5^{10} \cdot 5^7}{5^4 \cdot 5^{15}}$; 3) $\frac{3^{22} \cdot 3^{11}}{3 \cdot 3^{20} \cdot 3^3}$; 4) $\frac{13^{28} \cdot 13^{16} \cdot 13^2}{13^{30} \cdot 13^5 \cdot 13}$.

3. 1) $\frac{a^2 a^8 b^3}{a^9 b^2}$; 2) $\frac{c^3 d^5 c^9}{c^{10} d^7}$; 3) $\frac{x^{18} y^{14}}{x^4 y^7 x^6}$; 4) $\frac{x^9 y^3 x^{15} y^8}{x y^8 x^{10} y}$.

4. (Устно.) Вычислить:

1) 1^{-5}; 2) 4^{-3}; 3) $(-10)^0$; 4) $(-5)^{-2}$; 5) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$; 6) $\left(\frac{3}{7}\right)^{-1}$.

5. Записать в виде степени с отрицательным показателем:

1) $\frac{1}{4^5}$; 2) $\frac{1}{21^3}$; 3) $\frac{1}{x^7}$; 4) $\frac{1}{a^9}$.

Вычислить (6—7).

6. 1) $\left(\frac{10}{3}\right)^{-3}$; 2) $\left(-\frac{9}{11}\right)^{-2}$; 3) $(0{,}2)^{-4}$;
4) $(0{,}5)^{-5}$; 5) $-(-17)^{-1}$; 6) $-(-13)^{-2}$.

7. 1) $3^{-1} + (-2)^{-2}$; 2) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} - 4^{-2}$;
3) $(0{,}2)^{-2} + (0{,}5)^{-5}$; 4) $(-0{,}1)^{-3} - (-0{,}2)^{-3}$.

8. (Устно.) Сравнить с единицей:

1) 12^{-3}; 2) 21^0; 3) $(0{,}6)^{-5}$; 4) $\left(\frac{5}{19}\right)^{-4}$.

9. Записать без степеней с отрицательным показателем:
1) $(x-y)^{-2}$; 2) $(x+y)^{-3}$; 3) $3b^{-5}c^8$;
4) $9a^3b^{-4}$; 5) $a^{-1}b^2c^{-3}$; 6) $a^2b^{-1}c^{-4}$.

Вычислить (10—11).

10. 1) $\left(\frac{1}{7}\right)^{-3}\left(\frac{1}{7}\right)$; 2) $\left(-\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{1}{5}\right)^{-4}$;
3) $0{,}3^7\cdot 0{,}3^{-10}$; 4) $17^{-5}\cdot 17^3\cdot 17$.

11. 1) $9^7:9^{10}$; 2) $(0{,}2)^2:(0{,}2)^{-2}$;
3) $\left(\frac{2}{13}\right)^{-12}:\left(\frac{2}{13}\right)^2$; 4) $\left(\frac{2}{5}\right)^3:\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}$.

12. Возвести степень в степень:
1) $(a^3)^{-5}$; 2) $(b^{-2})^{-4}$; 3) $(a^{-3})^7$; 4) $(b^7)^{-4}$.

13. Возвести в степень произведение:
1) $(ab^{-2})^3$; 2) $(a^2b^{-1})^4$; 3) $(2a^2)^{-6}$; 4) $(3a^3)^{-4}$.

14. Выполнить действия:
1) $\left(\frac{a^8}{b^7}\right)^{-2}$; 2) $\left(\frac{m^{-4}}{n^{-5}}\right)^{-3}$; 3) $\left(\frac{2x^6}{3y^{-4}}\right)^2$; 4) $\left(\frac{-4x^{-5}y}{z^3}\right)^3$.

15. Вычислить значение выражения:

1) $(x^2y^{-2}-4y^{-2})\cdot\left(\frac{1}{y}\right)^{-2}$ при $x=5$, $y=6{,}7$;

2) $((a^2b^{-1})^4-a^0b^4):\frac{a^4-b^4}{b^2}$ при $a=2$, $b=-3$.

Записать в стандартном виде (16—17).

16. 1) $200\,000^4$; 2) $0{,}0003^3$; 3) 4000^{-2}; 4) $0{,}002^{-3}$.

17. 1) 0,0000087; 2) 0,00000005086; 3) $\frac{1}{125}$; 4) $\frac{1}{625}$.

18. Процесс шлифовки стекла заканчивается, когда глубина выемок на его поверхности не превышает $3\cdot 10^{-3}$ мм. Записать число $3\cdot 10^{-3}$ в виде десятичной дроби.

19. Атом сверхтяжёлого водорода существует лишь 0,00000000001 с. Записать число 0,00000000001 в виде степени числа 10.

20. Размеры вируса гриппа составляют около 10^{-4} мм. Записать число 10^{-4} в виде десятичной дроби.

21. Дробь представить в виде степени и найти её значение при данном значении a:

1) $\dfrac{a^8a^{-7}}{a^{-2}}$, $a=0{,}8$; 2) $\dfrac{a^{15}a^3}{a^{13}}$, $a=\dfrac{1}{2}$.

22. Вычислить:

1) $((-20)^7)^{-7} : ((-20)^{-6})^8 + 2^{-2}$; 2) $((-17)^{-4})^{-6} : ((-17)^{-13})^{-2} - \left(\dfrac{1}{17}\right)^{-2}$.

23. Применить свойства степени и вычислить на микрокалькуляторе с точностью до 0,01:

1) $(1{,}3)^{-118} \cdot (1{,}3)^{127}$; 2) $(0{,}87)^{-74} : (0{,}87)^{-80}$;

3) $\left(\dfrac{17}{19}\right)^{-47} : \left(\dfrac{17}{19}\right)^{-51}$; 4) $\left(\dfrac{23}{21}\right)^{56} \cdot \left(\dfrac{23}{21}\right)^{-52}$.

24. Вычислить на микрокалькуляторе и записать результат в стандартном виде:

1) $(786^{-7})^4 : (786^5)^{-6}$; 2) $(923^3)^{-6} \cdot (923^5)^4$;

3) $(1{,}76)^2 \cdot 35^2$; 4) $47^3 : (2{,}5)^3$.

25. С помощью микрокалькулятора вычислить объём куба, длина ребра которого равна:

1) $1{,}54 \cdot 10^{-4}$ мм; 2) $3{,}18 \cdot 10^5$ км.

26. Упростить:

1) $(a^{-3} + b^{-3}) \cdot (a^{-2} - b^{-2})^{-1} \cdot (a^{-2} - a^{-1}b^{-1} + b^{-2})^{-1}$;

2) $(a^{-2}b - ab^{-2}) \cdot (a^{-2} + a^{-1}b^{-1} + b^{-2})^{-1}$.

Диалог об истории

Первые обозначения степеней с отрицательными показателями

Я знаю, что в «Арифметике» Диофанта, которую он написал в III в., впервые встречаются обозначения натуральных степеней числа x.

Действительно, Диофант для решения своих уравнений ввёл обозначения первых шести натуральных степеней числа x. Там же он ввёл и понятие «отвлечённой единицы» (x^0), которую обозначал в своей книге $\overset{\circ}{M}$. Диофант же ввёл специальные обозначения и для x^{-6}, x^{-5}, x^{-4}, x^{-3}, x^{-2} и x^{-1}. Известно также, что в середине первого тысячелетия индийские математики оперировали степенями с натуральными показателями от 1 до 9.

А когда появились записи степеней с отрицательными показателями?

Впервые запись степени с отрицательным показателем появилась в книге Н. Шюке «Наука о числах в трёх частях» в XV в.

Шаг вперёд

Фантастические разрезы и реальные расчёты

Предлагаю пофантазировать на актуальную тему. Недавно был изобретён сверхтонкий материал — *графен*. Кстати, один из его изобретателей К. С. Новосёлов — ученик М. И. Шабунина, одного из авторов этого учебника. Толщина графена равна диаметру атома углерода, т. е. 0,1 нм. Один нанометр (1 нм) равен 10^{-9} м. Допустим, имеется квадрат со стороной 1 дм графеновой плёнки. Её разрезают пополам, одну из половинок снова режут пополам и т. д. до тех пор, пока не получится квадрат со стороной, равной диаметру атома углерода. Как вы думаете, сколько нужно сделать таких разрезов?

Думаю, что очень много...

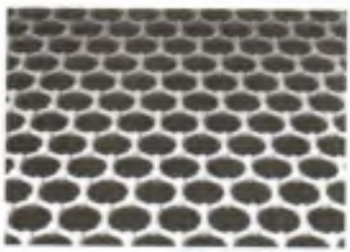
Давайте сделаем расчёт. Для этого нам понадобится знание свойств степени. После второго разреза получим квадрат со стороной $\frac{1}{2}$ дм, после четвёртого — $\frac{1}{2^2}$ дм, после шестого — $\frac{1}{2^3}$ дм, после восьмого — $\frac{1}{2^4}$ дм и т. д., после $2n$-го разреза — $\frac{1}{2^n}$ дм.

Теперь выразим диаметр атома углерода через степень числа 2. Мы знаем, что $2^{10} = 1024$. Будем считать, что $2^{10} \approx 1000 = 10^3$. Диаметр d атома углерода равен 10^{-10} м, т. е.

$$d = 10^{-10} \text{ м} = \frac{1}{10^{10}} \text{ м} = \frac{10}{10^{10}} \text{ дм} = \frac{1}{10^9} \text{ дм} =$$

$$= \frac{1}{(10^3)^3} \text{ дм} \approx \frac{1}{(2^{10})^3} \text{ дм} = \frac{1}{2^{30}} \text{ дм}.$$

Попробую теперь сам определить искомое число разрезов. Итак, после $2n$-го разреза сторона листа графена, равная $\frac{1}{2^n}$ дм, должна быть примерно равна диаметру атома углерода, т. е. $\frac{1}{2^{30}}$ дм. Очевидно, что это произойдёт при $n = 30$. То есть всего-то нужно сделать $2n = 2 \cdot 30 = 60$ разрезов.



Кристаллическая структура графена

Делимость и степени

Используя свойства степеней, можно, например, доказать, что число $2^{10}+5^{12}$ — составное.

Для этого мы должны представить эту сумму в виде произведения хотя бы двух множителей, отличных от 1.

Ты верно вспомнил понятие составного числа. Но для доказательства потребуется ещё знание формул квадрата суммы двух чисел и разности квадратов, а также того, что $a=a+b-b$.

● $2^{10}+5^{12}=(2^5)^2+(5^6)^2=(2^5)^2+(5^6)^2+2\cdot 2^5\cdot 5^6-2\cdot 2^5\cdot 5^6=$
$=(2^5+5^6)^2-2^6\cdot 5^6=(2^5+5^6-2^3\cdot 5^3)(2^5+5^6+2^3\cdot 5^3).$

Очевидно, что каждый множитель здесь больше 1. ○

А теперь попробуйте самостоятельно доказать, что сумма $5+5^2+5^3+\ldots+5^{2010}$ делится на 6.

Я, кажется, знаю, как доказать. Нужно сгруппировать слагаемые попарно...

§ 2 Арифметический корень натуральной степени

С понятием арифметического квадратного корня из числа вы познакомились в 8 классе. Извлечение квадратного корня — операция, обратная возведению числа в квадрат. В этом параграфе вы познакомитесь с извлечением корня n-й степени — операцией, обратной возведению числа в n-ю степень.

Нужно вспомнить:

- понятия чётного и нечётного чисел;
- определение арифметического квадратного корня из числа;
- решение линейных неравенств;
- метод интервалов.

Задача 1. Решить уравнение $x^4=16$.

▶ Запишем уравнение в виде

$$x^4-16=0 \text{ или } (x^2-4)(x^2+4)=0.$$

Так как $x^2+4\neq 0$, то $x^2-4=0$, откуда $x_1=2$, $x_2=-2$. ◁

Итак, уравнение $x^4=16$ имеет два действительных корня $x_1=2$, $x_2=-2$.

Их называют корнями четвёртой степени из числа 16, а положительный корень (число 2) называют **арифметическим корнем** четвёртой степени из числа 16 и обозначают $\sqrt[4]{16}$.

Таким образом, $\sqrt[4]{16}=2$.

Можно доказать, что уравнение $x^n=a$, где n — натуральное число, a — неотрицательное число, имеет единственный неотрицательный корень. Этот корень называют арифметическим корнем n-й степени из числа a.

! Определение. **Арифметическим корнем натуральной степени** $n \geqslant 2$ из неотрицательного числа a называется неотрицательное число, n-я степень которого равна a.

Арифметический корень n-й степени из числа a обозначается так: $\sqrt[n]{a}$. Число a называется подкоренным выражением. Если $n=2$, то вместо $\sqrt[2]{a}$ пишут $\sqrt{a}$.

Арифметический корень второй степени называют также **квадратным корнем**, а корень третьей степени называют **кубическим корнем**.

В тех случаях, когда ясно, что речь идёт об арифметическом корне n-й степени, кратко говорят: «Корень n-й степени».

Чтобы, используя определение, доказать, что $\sqrt[n]{a}$ равен b, нужно показать, что:
1) $b \geqslant 0$; 2) $b^n=a$.

Например, $\sqrt[3]{64}=4$, так как $4>0$ и $4^3=64$.

! Из определения арифметического корня следует, что

$$\text{если } a \geqslant 0, \text{ то } \left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a, \quad \sqrt[n]{a^n}=a.$$

Например, $\left(\sqrt[5]{7}\right)^5=7$, $\sqrt[6]{13^6}=13$.

Действие, посредством которого отыскивается корень n-й степени, называется **извлечением корня n-й степени**. Это действие является обратным к возведению в n-ю степень.

Задача 2. Решить уравнение $x^3=-8$.

► Это уравнение можно записать так: $-x^3=8$ или $(-x)^3=8$. Обозначим $-x=y$, тогда $y^3=8$.

Это уравнение имеет один положительный корень $y = \sqrt[3]{8} = 2$. Отрицательных корней уравнение $y^3 = 8$ не имеет, так как $y^3 < 0$ при $y < 0$. Число $y = 0$ также не является корнем этого уравнения. Итак, уравнение $y^3 = 8$ имеет только один корень $y = 2$, а значит, уравнение $x^3 = -8$ имеет только один корень $x = -y = -2$.
Ответ. $x = -2$. ◁

Коротко решение уравнения $x^3 = -8$ можно записать так: $x = -\sqrt[3]{8} = -2$.

Шаг вперёд

Вообще для любого нечётного натурального числа $2k+1$ уравнение $x^{2k+1} = a$ при $a < 0$ имеет только один корень, причём отрицательный. Этот корень обозначается, как и арифметический корень, символом $\sqrt[2k+1]{a}$. Его называют **корнем нечётной степени из отрицательного числа**.

Например, $\sqrt[3]{-27} = -3$, $\sqrt[5]{-32} = -2$.

Корень нечётной степени из отрицательного числа a связан с арифметическим корнем из числа $-a = |a|$ следующим равенством:

$$\sqrt[2k+1]{a} = -\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{|a|}.$$

Например, $\sqrt[5]{-243} = -\sqrt[5]{243} = -3$.

Устные вопросы и задания

1. Что называется арифметическим корнем натуральной степени n, где $n \geqslant 2$?
2. Как называют арифметический корень второй степени; третьей степени?
3. Как с помощью определения арифметического корня доказать, что $\sqrt[3]{125} = 5$?
4. Упростить выражение $(\sqrt[n]{a})^n$; $\sqrt[n]{a^n}$, если $a \geqslant 0$.
5. Сколько существует действительных корней шестой степени из положительного числа?
6. Сколько существует арифметических корней четвёртой степени из неотрицательного числа?
7. Сколько существует корней пятой степени из отрицательного числа?
8. Для $a < 0$ указать верные равенства:

   1) $\sqrt[3]{a} = -\sqrt[3]{a}$; 2) $\sqrt[3]{a} = -\sqrt[3]{-a}$; 3) $\sqrt[3]{a} = -\sqrt[3]{|a|}$.

Вводные упражнения

1. Найти квадрат числа:
1) $0;\ -1;\ 2;\ -3;\ 4;\ 11;\ -12;\ 13;\ -14;\ 15;$
2) $0{,}01;\ 0{,}2;\ -0{,}3;\ 0{,}04;$ 3) $\frac{1}{5};\ -\frac{2}{7};\ \frac{3}{11};\ -\frac{5}{14}.$

2. Найти куб числа:
1) $0;\ 1;\ -2;\ 3;\ -4;\ 5;\ -6;$ 2) $-0{,}1;\ -0{,}2;\ 0{,}3;\ 0{,}4;$
3) $1\frac{1}{2};\ -1\frac{1}{3};\ 1\frac{1}{4};\ -1\frac{1}{5}.$

3. Найти четвёртую степень числа: $2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 0{,}3;\ 0{,}4;\ \frac{2}{3};\ \frac{3}{4}.$

4. Решить неравенство:
1) $3x-5>0;$ 2) $7-2x\geqslant 0;$
3) $(x-8)(x+9)\geqslant 0;$ 4) $(x+4)(x-6)<0;$
5) $x^2+5x+6\geqslant 0;$ 6) $5x-x^2-6>0;$
7) $(x-1)(x+2)(x+3)<0;$ 8) $(x-4)(x-1)(x+5)\geqslant 0.$

5. Разложить на множители:
1) $8a^2-6a;$ 2) $a^2-6a+9;$ 3) $x^3+8x^2+16x;$
4) $2x^3-8x^2+8x;$ 5) $2ab+4b-a-2;$ 6) $3a^2-a-2.$

Упражнения

27. (Устно.) 1) Найти арифметический квадратный корень из числа: $1;\ 0;\ 16;\ 0{,}81;\ 169;\ \frac{1}{289}.$

2) Найти арифметический кубический корень из числа: $1;\ 0;\ 125;\ \frac{1}{27};\ 0{,}027;\ 0{,}064.$

3) Найти арифметический корень четвёртой степени из числа: $0;\ 1;\ 81;\ \frac{16}{81};\ \frac{256}{625};\ 0{,}0016.$

Вычислить (28—30).

28. 1) $\sqrt[6]{36^3};$ 2) $\sqrt[12]{64^2};$ 3) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{25}\right)^2};$ 4) $\sqrt[8]{225^4}.$

29. 1) $\sqrt[3]{10^6};$ 2) $\sqrt[3]{3^{12}};$ 3) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{12}\right)^{12}};$ 4) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{3}\right)^{16}}.$

30. 1) $\sqrt[3]{-64};$ 2) $\sqrt[3]{-1};$ 3) $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}};$ 4) $\sqrt[3]{-125};$ 5) $\sqrt[3]{-34^3};$ 6) $\sqrt[3]{-8^3}.$

31. Решить уравнение:

1) $x^4=81$; 2) $x^5=-\frac{1}{32}$; 3) $5x^5=-160$; 4) $2x^6=128$.

32. При каких значениях x имеет смысл выражение:

1) $\sqrt[6]{2x-3}$; 2) $\sqrt[3]{x+3}$; 3) $\sqrt[8]{2x^2-x-1}$; 4) $\sqrt[4]{\frac{2-3x}{2x-4}}$?

Вычислить (**33—34**).

33. 1) $\sqrt[3]{-125}+\frac{1}{8}\sqrt[6]{64}$; 2) $\sqrt[5]{32}-0{,}5\sqrt[3]{-216}$;

3) $-\frac{1}{3}\sqrt[4]{81}+\sqrt[4]{625}$; 4) $\sqrt[3]{-1000}-\frac{1}{4}\sqrt[4]{256}$;

5) $\sqrt[4]{0{,}0001}-2\sqrt{0{,}25}+\sqrt[5]{-\frac{1}{32}}$; 6) $\sqrt[5]{\frac{1}{243}}+\sqrt[3]{-0{,}001}-\sqrt[4]{0{,}0016}$.

34. 1) $\sqrt{9+\sqrt{17}}\cdot\sqrt{9-\sqrt{17}}$; 2) $\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2$;

3) $\left(\sqrt{5+\sqrt{21}}+\sqrt{5-\sqrt{21}}\right)^2$; 4) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

35. Упростить:

1) $\sqrt[3]{(x-2)^3}$ при: а) $x\geqslant 2$; б) $x<2$;

2) $\sqrt{(3-x)^6}$ при: а) $x\leqslant 3$; б) $x>3$.

36. Сколько натуральных чисел n, таких, что $1987<\sqrt{n}<1988$?

Диалог об истории

Нахождение приближённых значений квадратных и кубических корней древними математиками

Известный вам учёный-поэт средневековья О. Хайям в одной из дошедших до нас книг сообщает, что нашёл способы извлечения корней любых степеней. Но труды с описанием этих способов не были обнаружены потомками.

Может быть, О. Хайям пошутил и ни он, ни его современники не умели находить даже приближённо значения разных корней?

Думаю, что Хайям действительно умел делать то, о чём писал. Просто многие его рукописи потерялись. Зато сохранилась книга по арифметике известного арабского математика Алькархи, жившего чуть раньше Омара Хайяма. Алькархи после изучения приёмов извлечения корней греками и индусами подробно описал в своей книге, как находить приближённые значения квадратных и кубических корней.

Расскажите, пожалуйста, об этих приёмах. Они и нам могут быть полезны.

Действительно, эти приёмы вам могут пригодиться и на контрольных работах, и на экзаменах, если нельзя будет использовать для вычислений микрокалькулятор. Алькархи поступал следующим образом. Если первое приближение числа $\sqrt{A} = \sqrt{a^2 + b}$ (где a — наибольшее натуральное число, такое, что $a^2 \leqslant A$) принять за a, то следующим, более близким значением будет $a + \frac{b}{2a+1}$, т. е.

$$\sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a+1}. \qquad (1)$$

Предположительно, эту формулу Алькархи вывел с помощью *метода ложного положения.*

Историки предполагают, что формула (1) помогла итальянскому математику Л. Фибоначчи с помощью *метода двух ложных положений* найти *формулу для извлечения кубического корня из числа:*

$$\sqrt[3]{A} = \sqrt[3]{a^3 + b} \approx a + \frac{b}{3a^2 + 3a + 1}, \qquad (2)$$

где a — наибольшее натуральное число, такое, что $a^3 \leqslant A$.

Попробуйте самостоятельно с помощью формул (1) и (2) найти приближённые значения корней: $\sqrt{273}$, $\sqrt{156}$, $\sqrt[3]{145}$, $\sqrt[3]{236}$. Полученные результаты проверьте с помощью микрокалькулятора.

§ 3 Свойства арифметического корня

В 8 классе вы изучили свойства арифметического квадратного корня и обосновали их с помощью свойств степени с натуральным показателем. В этом параграфе аналогичным образом будут обоснованы свойства арифметических корней любых степеней. К действиям с корнями разных степеней вы ещё раз вернётесь в 10 классе, поэтому применение свойств корней пока будет иллюстрироваться в основном на арифметических корнях, степень которых не превосходит четвёртой.

Нужно вспомнить:

- определение арифметического корня натуральной степени;
- свойства арифметического квадратного корня;
- свойства степени с натуральным показателем;
- таблицы квадратов и кубов натуральных чисел от 1 до 10;
- понятие корня третьей степени из отрицательного числа;
- нахождение (с заданной степенью точности) значений квадратных корней с помощью микрокалькулятора.

Арифметический корень n-й степени обладает следующими **свойствами**:

Свойства Если $a \geqslant 0$, $b > 0$ и n, m — натуральные числа, причём $n \geqslant 2$, $m \geqslant 2$, то

1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$
2. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
3. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$
4. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nm]{a}$

В свойстве 1 число b может также быть равным 0, в свойстве 3 число m может быть любым целым, если $a > 0$.

Докажем, например, что $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$.

Воспользуемся определением арифметического корня:

1) $\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} \geqslant 0$, так как $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$.

2) $\left(\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}\right)^n = ab$, так как $\left(\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \left(\sqrt[n]{b}\right)^n = ab$.

Аналогично доказываются и остальные свойства.

Приведём примеры применения свойств арифметического корня.

1) $\sqrt[4]{27}\,\sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{27 \cdot 3} = \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$;

2) $\sqrt[3]{\dfrac{256}{625}} : \sqrt[3]{\dfrac{4}{5}} = \sqrt[3]{\dfrac{256}{625} : \dfrac{4}{5}} = \sqrt[3]{\dfrac{64}{125}} = \dfrac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{125}} = \dfrac{4}{5}$;

3) $\sqrt{5^6} = \sqrt{(5^3)^2} = \left(\sqrt{5^3}\right)^2 = 5^3 = 125$;

4) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{4096}} = \sqrt[12]{4096} = \sqrt[12]{2^{12}} = 2$;

5) $\left(\sqrt[4]{9}\right)^{-2} = \sqrt[4]{9^{-2}} = \sqrt[4]{\dfrac{1}{81}} = \dfrac{1}{3}$.

Задача. Упростить выражение $\dfrac{\left(\sqrt[4]{a^3b^2}\right)^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}b^6}}}$, где $a > 0$, $b > 0$.

Используя свойства арифметического корня, получаем

$$\frac{\left(\sqrt[4]{a^3b^2}\right)^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}b^6}}} = \frac{a^3b^2}{\sqrt[6]{a^{12}b^6}} = \frac{a^3b^2}{a^2b} = ab.$$

Устные вопросы и задания

1. Сформулировать свойства арифметического корня натуральной степени.
2. Назвать свойства, которые применены при нахождении корней в каждом из примеров 1—5 текста параграфа.
3. Почему в условии задачи в тексте параграфа подчёркивается, что значения букв a и b, входящих в выражение, положительны?

Вводные упражнения

1. Найти длину ребра куба, объём которого равен 27 см^3; 125 м^3; 1000 дм^3.
2. Вычислить:
   1) $\sqrt{16}$; $\sqrt[4]{16}$; $\sqrt[3]{8}$; 2) $\sqrt{9}$; $\sqrt[4]{81}$; $\sqrt[3]{27}$;
   3) $(\sqrt{7})^2$; $(\sqrt[3]{7})^3$; 4) $\sqrt[3]{-27}$; $\sqrt[3]{-125}$.
3. При каких значениях x имеет смысл выражение:
   1) $\sqrt{x}$; 2) $\sqrt{x+1}$; 3) $\sqrt[3]{x}$; 4) $\sqrt[3]{x+1}$?
4. Вычислить:
   1) $\sqrt{400 \cdot 0{,}25}$; 2) $\sqrt{8^4 \cdot (-4)^6}$; 3) $\dfrac{\sqrt{63}}{3\sqrt{7}}$; 4) $(3\sqrt{10})^2$.

Упражнения[1]

Вычислить (37—40).

37. 1) $\sqrt[3]{343 \cdot 0{,}125}$; 2) $\sqrt[3]{512 \cdot 216}$;
3) $\sqrt[4]{256 \cdot 0{,}0081}$; 4) $\sqrt[5]{32 \cdot 100\,000}$.

38. 1) $\sqrt[3]{5^3 \cdot 7^3}$; 2) $\sqrt[4]{11^4 \cdot 3^4}$; 3) $\sqrt[4]{(0{,}2)^4 \cdot 8^4}$; 4) $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot 21^3}$.

39. 1) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{500}$; 2) $\sqrt[3]{0{,}2} \cdot \sqrt[3]{0{,}04}$; 3) $\sqrt[4]{324} \cdot \sqrt[4]{4}$; 4) $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{8}$.

40. 1) $\sqrt[5]{3^{10} \cdot 2^{15}}$; 2) $\sqrt[3]{2^3 \cdot 5^6}$; 3) $\sqrt[4]{3^{12} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^8}$; 4) $\sqrt[4]{4^{12} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8}$.

41. Извлечь корень:
1) $\sqrt[3]{64x^3z^6}$; 2) $\sqrt[4]{a^8b^{12}}$; 3) $\sqrt[5]{32x^{10}y^{20}}$; 4) $\sqrt[3]{a^{12}b^{15}}$.

[1] Здесь и далее буквами обозначены положительные числа, если нет дополнительных условий.

42. Упростить выражение:

1) $\sqrt[3]{2ab^2} \cdot \sqrt[3]{4a^2b}$;   2) $\sqrt[4]{3a^2b^3} \cdot \sqrt[4]{27a^2b}$;

3) $\sqrt[4]{\dfrac{ab}{c}} \cdot \sqrt[4]{\dfrac{a^3c}{b}}$;   4) $\sqrt[3]{\dfrac{16a}{b^2}} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{1}{2ab}}$.

Вычислить (43—44).

43. 1) $\sqrt[3]{\dfrac{64}{125}}$;   2) $\sqrt[4]{\dfrac{16}{81}}$;   3) $\sqrt[3]{3\dfrac{3}{8}}$;   4) $\sqrt[4]{5\dfrac{1}{16}}$.

44. 1) $\sqrt[4]{324} : \sqrt[4]{4}$;   2) $\sqrt[3]{128} : \sqrt[3]{2000}$;

3) $\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}$;   4) $\dfrac{\sqrt[5]{256}}{\sqrt[5]{8}}$;

5) $(\sqrt{20} - \sqrt{45}) : \sqrt{5}$;   6) $(\sqrt[3]{625} - \sqrt[3]{5}) : \sqrt[3]{5}$.

45. Упростить выражение:

1) $\sqrt[5]{a^6b^7} : \sqrt[5]{ab^2}$;   2) $\sqrt[3]{81x^4y} : \sqrt[3]{3xy}$;

3) $\sqrt[3]{\dfrac{3x}{y^2}} : \sqrt[3]{\dfrac{y}{9x^2}}$;   4) $\sqrt[4]{\dfrac{2b}{a^3}} : \sqrt[4]{\dfrac{a}{8b^3}}$.

Вычислить (46—47).

46. 1) $(\sqrt[6]{7^3})^2$;   2) $(\sqrt[6]{9})^{-3}$;   3) $(\sqrt[10]{32})^2$;   4) $(\sqrt[8]{16})^{-4}$.

47. 1) $\sqrt{\sqrt[3]{729}}$;   2) $\sqrt{\sqrt{1024}}$;   3) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{9}} \cdot \sqrt[9]{3^7}$;   4) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{25}} \cdot \sqrt[6]{5^5}$.

48. Упростить выражение:

1) $(\sqrt[3]{x})^6$;   2) $(\sqrt[3]{y^2})^3$;   3) $(\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{b})^6$;

4) $(\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{b^3})^{12}$;   5) $\left(\sqrt{\sqrt[3]{a^2b}}\right)^6$;   6) $\left(\sqrt[3]{\sqrt[4]{27a^3}}\right)^4$.

Вычислить (49—50).

49. 1) $\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}} \cdot \sqrt[3]{2\dfrac{1}{4}}$;   2) $\sqrt[4]{\dfrac{3}{4}} \cdot \sqrt[4]{6\dfrac{3}{4}}$;   3) $\sqrt[4]{15\dfrac{5}{8}} : \sqrt[4]{\dfrac{2}{5}}$;

4) $\sqrt[3]{11\dfrac{1}{4}} : \sqrt[3]{3\dfrac{1}{3}}$;   5) $(\sqrt[3]{\sqrt{27}})^2$;   6) $(\sqrt{\sqrt[3]{16}})^3$.

50. 1) $\dfrac{\sqrt[3]{49} \cdot \sqrt[3]{112}}{\sqrt[3]{250}}$;   2) $\dfrac{\sqrt[4]{54} \cdot \sqrt[4]{120}}{\sqrt[4]{5}}$;

3) $\dfrac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}} + \sqrt[6]{27^2} - \sqrt{\sqrt[3]{64}}$;

4) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}} + \sqrt[4]{18} \cdot \sqrt[4]{4\frac{1}{2}} - \sqrt{\sqrt{256}}$;

5) $\sqrt[3]{11 - \sqrt{57}} \cdot \sqrt[3]{11 + \sqrt{57}}$;

6) $\sqrt[4]{17 - \sqrt{33}} \cdot \sqrt[4]{17 + \sqrt{33}}$.

Упростить выражение (51—53).

51. 1) $\sqrt[3]{\dfrac{ab^2}{c}} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{a^5b}{c^2}}$;

2) $\sqrt[5]{\dfrac{8a^3}{b^2}} \cdot \sqrt[5]{\dfrac{4a^7}{b^3}}$;

3) $\dfrac{\sqrt[4]{a^2b^2c} \cdot \sqrt[4]{a^3b^3c^2}}{\sqrt[4]{abc^3}}$;

4) $\dfrac{\sqrt[3]{2a^4b} \cdot \sqrt[3]{4ab}}{2b\sqrt[3]{a^2b^2}}$;

5) $(\sqrt[5]{a^3})^5 \cdot (\sqrt[3]{b^2})^3$;

6) $(\sqrt[4]{a^3b^3})^4 : (\sqrt[3]{ab^2})^3$.

52. 1) $\sqrt[3]{2ab} \cdot \sqrt[3]{4a^2b} \cdot \sqrt[3]{27b}$;

2) $\sqrt[4]{abc} \cdot \sqrt[4]{a^3b^2c} \cdot \sqrt[4]{b^5c^2}$;

3) $\dfrac{\sqrt[5]{a^3b^2} \cdot \sqrt[5]{3a^2b^3}}{\sqrt[5]{3}}$;

4) $\dfrac{\sqrt[4]{8x^2y^5} \cdot \sqrt[4]{4x^3y}}{\sqrt[4]{2xy^2}}$.

53. 1) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{a^{18}}} + \left(\sqrt{\sqrt[3]{a^4}}\right)^3$;

2) $\left(\sqrt{\sqrt[3]{x^2}}\right)^3 + 2\left(\sqrt[4]{\sqrt{x}}\right)^8$;

3) $2\sqrt{\sqrt{a^4b^8}} - \left(\sqrt[3]{\sqrt{a^3b^6}}\right)^2$;

4) $\sqrt[3]{\sqrt{x^6y^{12}}} - (\sqrt[5]{xy^2})^5$;

5) $\left(\sqrt{\sqrt[4]{x^8y^2}}\right)^4 - (\sqrt[4]{x^2y^8})^2$;

6) $\left((\sqrt[5]{a\sqrt[5]{a}})^5 - \sqrt[5]{a}\right) : \sqrt[10]{a^2}$.

54. Вычислить на микрокалькуляторе с точностью до 0,01:

1) $\sqrt{7} \cdot \sqrt{14} : \sqrt{3}$;

2) $\sqrt{6,7} \cdot \sqrt{23} \cdot \sqrt{0,37}$.

55. Вычислить:

1) $\dfrac{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{9}}{\sqrt[6]{3}}$;

2) $\dfrac{\sqrt[3]{7}\,\sqrt[4]{343}}{\sqrt[12]{7}}$;

3) $(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{25})(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{5})$;

4) $(\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2})$.

56. Доказать, что $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = 2$.

57. Упростить выражение:

1) $\dfrac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}} - \dfrac{\sqrt{a} + \sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}}$;

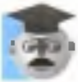
2) $\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}} - \dfrac{1}{\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}}\right)(\sqrt{a} - \sqrt{b})$;

3) $\dfrac{a - b}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}} - \dfrac{a + b}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}$;

4) $\left(\dfrac{a + b}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} - \sqrt[3]{ab}\right) : (\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})^2$.

Шаг вперёд

Знакомый приём в новой ситуации



Применяя свойства степеней вы сможете существенно упростить, например, такое выражение:

$$\left(1+\sqrt{a}\right)\left(1+\sqrt[4]{a}\right)\left(1+\sqrt[8]{a}\right)\left(1+\sqrt[16]{a}\right)\left(1+\sqrt[32]{a}\right)\left(1-\sqrt[32]{a}\right),$$

а затем найти его числовое значение при $a = 2013$.

Я помню, что в 7 классе мы решали похожую задачу, но без знаков корней. Могу устно упростить это выражение, начав умножение «с конца», и найти его числовое значение.

$$\left(1+\sqrt{a}\right)\left(1+\sqrt[4]{a}\right)\left(1+\sqrt[8]{a}\right)\left(1+\sqrt[16]{a}\right)\left(1+\sqrt[32]{a}\right)\left(1-\sqrt[32]{a}\right) = \ldots = 1 - a.$$

Его числовое значение при $a = 2013$ равно -2012.

Молодец. Теперь самостоятельно найдите значение выражения $\left(a-\sqrt{a}+1\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt[4]{a}+1\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt[4]{a}+1\right)$ при $a = 7$.

§ 4 Степень с рациональным показателем

В этом параграфе вы узнаете, что корень натуральной степени из положительного числа можно записывать в виде степени с дробным показателем. Часто бывает удобнее заменить действия с корнями действиями со степенями с дробными (рациональными) показателями. Свойства таких степеней аналогичны знакомым вам свойствам степеней с натуральными показателями.

Нужно вспомнить:

- определение рационального числа;
- понятие степени с натуральным показателем;
- понятие степени с целым отрицательным показателем;
- свойства степени с целым показателем;
- понятие арифметического корня натуральной степени из неотрицательного числа;
- свойства арифметического корня натуральной степени.

Задача 1. Вычислить $\sqrt[3]{5^6}$.

► Так как $5^6 = (5^2)^3$, то $\sqrt[3]{5^6} = \sqrt[3]{(5^2)^3} = 5^2 = 25$. ◄

Таким образом, $\sqrt[3]{5^6} = 5^{\frac{6}{3}}$. Так же можно показать, что $\sqrt{7^{-4}} = 7^{-\frac{4}{2}}$.

Если n — натуральное число, $n \geq 2$, m — целое число и частное $\frac{m}{n}$ является целым числом, то при $a > 0$ справедливо равенство

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}. \qquad (1)$$

По условию $\frac{m}{n}$ — целое число, т. е. при делении m на n в результате получается целое число k. Тогда из равенства $\frac{m}{n} = k$ следует, что $m = kn$. Применяя свойства степени и арифметического корня, получаем

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^{kn}} = \sqrt[n]{(a^k)^n} = a^k = a^{\frac{m}{n}}.$$

Если же частное $\frac{m}{n}$ не является целым числом, то степень $a^{\frac{m}{n}}$, где $a > 0$, определяют так, чтобы осталась верной формула (1), т. е. и в этом случае считают, что

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}. \qquad (2)$$

Таким образом, формула (2) справедлива для любого целого числа m, любого натурального числа $n \geq 2$ и $a > 0$.

Например,

$$16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16^3} = \sqrt[4]{2^{12}} = 2^3 = 8; \quad 7^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{7^5} = \sqrt[4]{7^4 \cdot 7} = 7\sqrt[4]{7};$$

$$27^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^{-2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{27^2}} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{3^6}} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}.$$

Напомним, что **рациональное число** r — это число вида $\frac{m}{n}$, т. е. $r = \frac{m}{n}$, где m — целое, n — натуральное число. Если $n = 1$, то a^r — степень с целым показателем и для $a > 0$ она определена. Если $n \geq 2$, то по формуле (2) получаем $a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Таким образом, степень определена для любого рационального показателя и любого положительного основания.

Если $r = \frac{m}{n} > 0$, то выражение $\sqrt[n]{a^m}$ имеет смысл не только при $a > 0$, но и при $a = 0$, причём $\sqrt[n]{0^m} = 0$. Поэтому считают, что при $r > 0$ выполняется равенство $0^r = 0$.

Пользуясь формулами (1) и (2), степень с рациональным показателем можно представить в виде корня и наоборот.

Отметим, что из формулы (2) и свойств корня следует равенство

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mk}{nk}},$$

где $a > 0$, m — целое и n, k — натуральные числа.

Например, $7^{\frac{3}{4}} = 7^{\frac{6}{8}} = 7^{\frac{9}{12}}$.

Свойства Можно показать, что **все свойства степени с натуральным показателем верны для степени с любым рациональным показателем и положительным основанием.** А именно для любых рациональных чисел p и q и любых $a > 0$ и $b > 0$ верны равенства:

1. $a^p a^q = a^{p+q}$
2. $a^p : a^q = a^{p-q}$
3. $(a^p)^q = a^{pq}$
4. $(ab)^p = a^p b^p$
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$

Эти свойства вытекают из свойств корней.

Шаг вперёд

Докажем, например, свойство $a^p a^q = a^{p+q}$.

● Пусть $p = \frac{m}{n}$, $q = \frac{k}{l}$, где n и l — натуральные числа, m и k — целые числа. Нужно доказать, что $a^{\frac{m}{n}} a^{\frac{k}{l}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{k}{l}}$.

Приведя дроби $\frac{m}{n}$ и $\frac{k}{l}$ к общему знаменателю, запишем левую часть равенства в виде $a^{\frac{m}{n}} a^{\frac{k}{l}} = a^{\frac{ml}{nl}} a^{\frac{kn}{nl}}$.

Используя определение степени с рациональным показателем, свойства корня и степени с целым показателем, получаем

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{k}{l}} = a^{\frac{ml}{nl}} \cdot a^{\frac{kn}{nl}} = \sqrt[nl]{a^{ml}} \cdot \sqrt[nl]{a^{kn}} =$$

$$= \sqrt[nl]{a^{ml} \cdot a^{kn}} = \sqrt[nl]{a^{ml+kn}} = a^{\frac{ml+kn}{nl}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{k}{l}}. \ \circ$$

Аналогично доказываются остальные свойства степени с рациональным показателем.

Приведём примеры применения свойств степени.

1) $7^{\frac{1}{4}}\cdot 7^{\frac{3}{4}}=7^{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=7$; 2) $9^{\frac{2}{3}}:9^{\frac{1}{6}}=9^{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}}=9^{\frac{1}{2}}=\sqrt{9}=3$;

3) $\left(16^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{9}{4}}=16^{\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{4}}=16^{\frac{3}{4}}=(2^4)^{\frac{3}{4}}=2^{4\cdot\frac{3}{4}}=2^3=8$;

4) $24^{\frac{2}{3}}=(2^3\cdot 3)^{\frac{2}{3}}=2^{3\cdot\frac{2}{3}}\cdot 3^{\frac{2}{3}}=4\sqrt[3]{3^2}=4\sqrt[3]{9}$;

5) $\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{8^{\frac{1}{3}}}{27^{\frac{1}{3}}}=\frac{(2^3)^{\frac{1}{3}}}{(3^3)^{\frac{1}{3}}}=\frac{2}{3}$.

Задача 2. Вычислить $25^{\frac{1}{5}}\cdot 125^{\frac{1}{5}}$.

▶ $25^{\frac{1}{5}}\cdot 125^{\frac{1}{5}}=(25\cdot 125)^{\frac{1}{5}}=(5^5)^{\frac{1}{5}}=5$. ◁

Задача 3. Упростить выражение: а) $\dfrac{a^{\frac{4}{3}}b+ab^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$; б) $\dfrac{a^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{7}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{4}{3}}}-\dfrac{a^{-\frac{1}{3}}-a^{\frac{5}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}}$.

▶ а) $\dfrac{a^{\frac{4}{3}}b+ab^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}=\dfrac{ab\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}=ab$.

б) $\dfrac{a^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{7}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{4}{3}}}-\dfrac{a^{-\frac{1}{3}}-a^{\frac{5}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}}=\dfrac{a^{\frac{1}{3}}(1-a^2)}{a^{\frac{1}{3}}(1-a)}-\dfrac{a^{-\frac{1}{3}}(1-a^2)}{a^{-\frac{1}{3}}(1+a)}=1+a-(1-a)=2a$. ◁

Устные вопросы и задания

1. Представить в виде степени с рациональным показателем и основанием 5: $\sqrt[3]{5}$; $\sqrt[4]{5}$; $\sqrt[3]{5^2}$.
2. При каких значениях a, m и n справедливо равенство $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$?
3. При каких значениях r имеет смысл равенство $0^r=0$?
4. При каких значениях a и b верны свойства степени 1—5?
5. Привести пример применения каждого из свойств степени с рациональным показателем.

Вводные упражнения

1. Вычислить:

1) $\sqrt[3]{3^3}$; 2) $\sqrt[3]{5^6}$; 3) $\sqrt[3]{25}\cdot\sqrt[3]{5}$; 4) $\sqrt[3]{\frac{162}{6}}$; 5) $\left(\sqrt[4]{25}\right)^{-2}$; 6) $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$.

2. Разложить на множители: 1) a^2-64; 2) a^2-6a+9; 3) $b^3-\frac{1}{8}$.

3. Разложить на множители по формуле разности квадратов: 1) $a-4$; 2) x^2-7.

4. Выполнить действия: $2^{-3}\cdot 2^7-(0{,}79)^0+\sqrt[3]{64}$.

5. Упростить: $\frac{x^{-3}y^2}{y^{-3}x}\cdot\frac{\sqrt{x^8}}{\sqrt[3]{y^{15}}}$.

Упражнения

58. (Устно.) Представить в виде степени с рациональным показателем:

1) $\sqrt{x^3}$; 2) $\sqrt[3]{a^4}$; 3) $\sqrt[4]{b^3}$; 4) $\sqrt[5]{x^{-1}}$; 5) $\sqrt[6]{a}$; 6) $\sqrt[7]{b^{-3}}$.

59. (Устно.) Представить в виде корня из степени с целым показателем:

1) $x^{\frac{1}{4}}$; 2) $y^{\frac{2}{5}}$; 3) $a^{-\frac{5}{6}}$; 4) $b^{-\frac{1}{3}}$; 5) $(2x)^{\frac{1}{2}}$; 6) $(3b)^{-\frac{2}{3}}$.

Вычислить (60—63).

60. 1) $64^{\frac{1}{2}}$; 2) $27^{\frac{1}{3}}$; 3) $8^{\frac{2}{3}}$; 4) $81^{\frac{3}{4}}$; 5) $16^{-0{,}75}$; 6) $9^{-1{,}5}$.

61. 1) $5^{\frac{2}{7}}\cdot 5^{\frac{5}{7}}$; 2) $9^{\frac{2}{3}}:9^{\frac{1}{6}}$; 3) $4^{\frac{1}{3}}:4^{\frac{5}{6}}$; 4) $(7^{-3})^{-\frac{2}{3}}$; 5) $\left(8^{\frac{1}{12}}\right)^{-4}$.

62. 1) $9^{\frac{2}{5}}\cdot 27^{\frac{2}{5}}$; 2) $7^{\frac{2}{3}}\cdot 49^{\frac{2}{3}}$; 3) $144^{\frac{3}{4}}:9^{\frac{3}{4}}$; 4) $150^{\frac{3}{2}}:6^{\frac{3}{2}}$.

63. 1) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0{,}75}+\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}$; 2) $(0{,}04)^{-1{,}5}-(0{,}125)^{-\frac{2}{3}}$;

3) $8^{\frac{9}{7}}:8^{\frac{2}{7}}-3^{\frac{6}{5}}\cdot 3^{\frac{4}{5}}$; 4) $\left(5^{-\frac{2}{5}}\right)^{-5}+\left((0{,}2)^{\frac{3}{4}}\right)^{-4}$.

64. Найти значение выражения:

1) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[6]{a}$ при $a=0{,}09$; 2) $\sqrt{b}:\sqrt[6]{b}$ при $b=27$;

3) $\frac{\sqrt{b}\,\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[6]{b}}$ при $b=1{,}3$; 4) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[12]{a^5}$ при $a=2{,}7$.

65. Представить в виде степени с рациональным показателем:

1) $a^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{a}$; 2) $b^{\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[6]{b}$; 3) $\sqrt[3]{b}:b^{\frac{1}{6}}$; 4) $a^{\frac{4}{3}}:\sqrt[3]{a}$.

66. Вычислить:

1) $2^{2-3\sqrt{5}}\cdot 8^{\sqrt{5}}$; 2) $3^{1+2\sqrt[3]{2}}:9^{\sqrt[3]{2}}$; 3) $6^{1+2\sqrt{3}}:(4^{\sqrt{3}}\cdot 9^{\sqrt{3}})$; 4) $(5^{1+\sqrt{2}})^{1-\sqrt{2}}$.

Упростить выражение (67—68).

67. 1) $(a^4)^{-\frac{3}{4}} \cdot \left(b^{-\frac{2}{3}}\right)^{-6}$; 2) $\left(\left(\frac{a^6}{b^{-3}}\right)^4\right)^{\frac{1}{12}}$;

3) $\left(\sqrt{x^{0,4} \cdot y^{1,2}}\right)^{10}$; 4) $\left(\sqrt[3]{x^{-0,5} \cdot y^{1,8}}\right)^{18}$.

68. 1) $\dfrac{a^{\frac{4}{3}}\left(a^{-\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{3}{4}} + a^{-\frac{1}{4}}\right)}$; 2) $\dfrac{b^{\frac{1}{5}}\left(\sqrt[5]{b^4} - \sqrt[5]{b^{-1}}\right)}{b^{\frac{2}{3}}\left(\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{b^{-2}}\right)}$;

3) $\dfrac{a^{\frac{5}{3}}b^{-1} - ab^{-\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^2}}$; 4) $\dfrac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt{b} + b^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}}$.

69. Вычислить:

1) $\left(2^{\frac{5}{3}} \cdot 3^{-\frac{1}{3}} - 3^{\frac{5}{3}} \cdot 2^{-\frac{1}{3}}\right) \cdot \sqrt[3]{6}$; 2) $\left(5^{\frac{1}{4}} : 2^{\frac{3}{4}} - 2^{\frac{1}{4}} : 5^{\frac{3}{4}}\right) \cdot \sqrt[4]{1000}$.

70. Упростить выражение:

1) $a^{\frac{1}{9}}\sqrt[6]{a\sqrt[3]{a}}$; 2) $\left(\sqrt[3]{ab^{-2}} + (ab)^{-\frac{1}{6}}\right)\sqrt[6]{ab^4}$;

3) $b^{\frac{1}{12}}\sqrt[3]{b\sqrt[4]{b}}$; 4) $\left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}\right)\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} - \sqrt[3]{ab}\right)$.

71. Сократить дробь:

1) $\dfrac{x-y}{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}}$; 2) $\dfrac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}}}$; 3) $\dfrac{m^{\frac{1}{2}} + n^{\frac{1}{2}}}{m + 2\sqrt{mn} + n}$; 4) $\dfrac{c - 2c^{\frac{1}{2}} + 1}{\sqrt{c} - 1}$.

Упростить выражение (72—74).

72. 1) $\left(1 - 2\sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{b}{a}\right) : \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)^2$; 2) $\left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right) : \left(2 + \sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)$;

3) $\dfrac{a^{\frac{1}{4}} - a^{\frac{9}{4}}}{a^{\frac{1}{4}} - a^{\frac{5}{4}}} - \dfrac{b^{-\frac{1}{2}} - b^{\frac{3}{2}}}{b^{\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{2}}}$; 4) $\dfrac{\sqrt{a} - a^{-\frac{1}{2}}b}{1 - \sqrt{a^{-1}b}} - \dfrac{\sqrt[3]{a^2} - a^{-\frac{1}{3}}b}{\sqrt[6]{a} + a^{-\frac{1}{3}}\sqrt{b}}$.

73. 1) $\dfrac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\dfrac{ab^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}-\dfrac{2a^2-4ab}{a-b}$; 2) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}-\dfrac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}{a^{\frac{2}{3}}-\sqrt[3]{ab}+b^{\frac{2}{3}}}$;

3) $\dfrac{3xy-y^2}{x-y}-\dfrac{y\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\dfrac{y\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$; 4) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}-\dfrac{a-b}{a^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{ab}+b^{\frac{2}{3}}}$.

74. 1) $\dfrac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}-\dfrac{a+b}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}$; 2) $\dfrac{a+b}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}-\dfrac{a-b}{a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}$;

3) $\dfrac{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}{a-b}-\dfrac{1}{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}$; 4) $\dfrac{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}{a+b}+\dfrac{1}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}$.

75. Вычислить на микрокалькуляторе с точностью до 0,01:

1) $\sqrt[3]{3}+\sqrt[4]{4}$; 2) $\sqrt[3]{7+\sqrt[3]{10}}$; 3) $5^{\sqrt{3}}$; 4) $(\sqrt[3]{2})^{\sqrt{3}}$; 5) π^{π}.

Диалог об истории

Радикал и степень с дробным показателем

С историей появления знака квадратного корня я вас знакомил в 8 классе. Добавлю ещё, что более 500 лет шёл процесс совершенствования знака *радикала* (корня). Современный знак $\sqrt{\ }$ состоит из двух частей: знака $\surd$ — видоизменённой буквы *r* (первой буквы латинского слова *«radix»* — корень) и черты над числом или выражением, заменившей ранее использовавшиеся скобки.

Вообще радикалом называют один из корней уравнения $x^n=a$, где n — натуральное число ($n \geqslant 2$), и обозначают $\sqrt[n]{a}$. При помощи радикалов можно записать корни любого уравнения второй, третьей и четвёртой степеней, выражая их через коэффициенты уравнения. В XIX в. выдающиеся математики *Нильс Хенрик Абель (1802—1829)* и *Эварист Галуа (1811—1832)* доказали, что решать в радикалах уравнения степени выше четвёртой можно только в частных случаях. К трудам и жизнеописанию этих замечательных учёных мы вернёмся в старших классах.

А кто и как первым стал записывать степень с дробным показателем?

Понятие степени с дробным показателем, обозначение такой степени и простейшие правила действий со степенями ввёл в своей книге «Алгоризм пропорций» французский математик, епископ города Лизьё *Николай Орем (ок. 1330—1382).*

Например, степень $4^{1\frac{1}{2}}$ Орем записывал так: $\left[1p\,\dfrac{1}{2}\right]4$.

В XVII в. фламандский учёный *Симон Стевин (1548—1620)* предложил понимать $\sqrt[n]{a}$ (при $a > 0$) как степень числа a с показателем $\frac{1}{n}$: $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$. До этого момента нахождение корня и степени в математике рассматривали как два независимых действия.

Наверное, древние учёные имели представление о степенях с дробными показателями, но записывали их без символов?

Действительно, представление о степени с рациональным показателем было ещё у Архимеда. Он, например, писал, что отношение объёмов большего и меньшего сегментов шара, образовавшихся после рассечения шара плоскостью, равно отношению между площадями их поверхностей, взятому, как мы бы сегодня сказали, в степени $\frac{3}{2}$.

Шаг вперёд

Степень с иррациональным показателем

Профессор, а существует ли степень, показателем которой является иррациональное число?

Конечно, существует. Найдём, например, значение степени $3^{\sqrt{2}}$. Для этого найдём сперва приближённое значение $\sqrt{2}$ с помощью микрокалькулятора: $2\ \sqrt{\ }\ 1{,}414213562.$

Выпишем последовательно приближённые значения $\sqrt{2}$ с точностью до 0,1; 0,01; 0,001 и т. д. Получим последовательность: 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; ... .

Запишем последовательность степеней числа 3 с этими рациональными показателями: $3^{1,4}$; $3^{1,41}$; $3^{1,414}$; $3^{1,4142}$; ... .

Можно показать, что эти степени являются последовательными приближёнными значениями некоторого действительного числа, которое обозначают $3^{\sqrt{2}}$. Вычислим на микрокалькуляторе:

$$3^{1,4} = 4{,}655536722,\quad 3^{1,41} = 4{,}7206965002,\quad 3^{1,414} = 4{,}727695035,$$

$$3^{1,4142} = 4{,}72873393,\quad 3^{\sqrt{2}} = 4{,}728804388.$$

Аналогично находится степень a^b с положительным основанием a и любым иррациональным показателем. Таким образом, теперь *степень с положительным основанием определена для любого действительного показателя, причём свойства степени с действительным показателем такие же, как и свойства степени с рациональным показателем.*

§ 5 Возведение в степень числового неравенства

Вы знакомы со свойствами числовых неравенств. Знаете, что неравенства одного знака с положительными левой и правой частями можно перемножать. Таким образом, вы умеете и возводить в любую натуральную степень неравенства с положительными левой и правой частями. Например, если $a > 3$, то $a^2 > 9$, $a^3 > 27$ и т. д. В этом параграфе вы убедитесь, что подобные неравенства можно возводить в любую (отличную от нуля) рациональную степень.

Нужно вспомнить:

- свойства числовых неравенств;
- понятия строгих и нестрогих неравенств;
- свойства степени с рациональным показателем;
- запись корня n-й степени в виде степени с рациональным показателем.

В курсе алгебры 8 класса было доказано, что при умножении неравенств одинакового знака, у которых левые и правые части положительны, получается неравенство того же знака.

Отсюда следует, что если $a > b > 0$ и n – натуральное число, то $a^n > b^n$.

По условию $a > 0$, $b > 0$. Перемножая n одинаковых неравенств $a > b$, получаем $a^n > b^n$.

Задача 1. Сравнить числа $(0{,}43)^5$ и $\left(\frac{3}{7}\right)^5$.

Так как $\frac{3}{7} \approx 0{,}428$ с точностью до 0,001, то $0{,}43 > \frac{3}{7}$. Поэтому $(0{,}43)^5 > \left(\frac{3}{7}\right)^5$.

Свойства

Если $a > b > 0$, $r > 0$, то $a^r > b^r$; (1)

если $a > b > 0$, $r < 0$, то $a^r < b^r$. (2)

Неравенство, у которого левая и правая части положительны, можно возводить в отличную от нуля рациональную степень.

Например, $5^{\frac{2}{7}} > 3^{\frac{2}{7}}$, так как $5 > 3$ и $\frac{2}{7} > 0$; $(0{,}7)^{-8} < (0{,}6)^{-8}$, так как $0{,}7 > 0{,}6$, а $-8 < 0$.

Шаг вперёд

Докажем свойство (1). Сначала докажем, что свойство (1) верно при $r=\frac{1}{n}$, а затем в общем случае при $r=\frac{m}{n}$.

1) Пусть $r=\frac{1}{n}$, где n — натуральное число, большее 1, $a>0$, $b>0$. По условию $a>b$. Нужно доказать, что $a^{\frac{1}{n}}>b^{\frac{1}{n}}$. Предположим, что это неверно, т. е. $a^{\frac{1}{n}}\leqslant b^{\frac{1}{n}}$. Но тогда, возводя это неравенство в натуральную степень n, получим $a\leqslant b$, что противоречит условию $a>b$. Итак, из $a>b>0$ следует, что $a^{\frac{1}{n}}>b^{\frac{1}{n}}$.

2) Пусть $r=\frac{m}{n}$, где m и n — натуральные числа. Тогда по доказанному из условия $a>b>0$ следует, что $a^{\frac{1}{n}}>b^{\frac{1}{n}}$. Возведя это неравенство в натуральную степень m, получаем $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m>\left(b^{\frac{1}{n}}\right)^m$, т. е. $a^{\frac{m}{n}}>b^{\frac{m}{n}}$.

Теперь докажем свойство (2). Если $r<0$, то $-r>0$. По свойству (1) из условия $a>b>0$ следует, что $a^{-r}>b^{-r}$. Умножая обе части этого неравенства на положительное число a^rb^r, получаем $b^r>a^r$, т. е. $a^r<b^r$.

В курсе высшей математики доказывается, что свойство (1) справедливо для любого положительного действительного числа r, а свойство (2) — для любого отрицательного действительного числа r.

Например, $\left(\frac{8}{9}\right)^{\sqrt{2}}>\left(\frac{7}{8}\right)^{\sqrt{2}}$, так как $\frac{8}{9}>\frac{7}{8}$, а $\sqrt{2}>0$, $\left(\frac{7}{8}\right)^{-\sqrt{3}}<\left(\frac{6}{7}\right)^{-\sqrt{3}}$, так как $\frac{7}{8}>\frac{6}{7}$, а $-\sqrt{3}<0$.

Отметим, что рассмотренные свойства возведения в степень строгих неравенств (со знаком > или <) справедливы и для нестрогих неравенств (со знаком ⩾ или ⩽).

Итак, если обе части неравенства положительны, то при возведении его в **положительную степень** знак неравенства **сохраняется**, а при возведении **в отрицательную степень** знак неравенства **меняется на противоположный.**

Напомним, что для строгих неравенств **противоположными** считаются знаки > и <, а для нестрогих — знаки ⩾ и ⩽.

Задача 2. Сравнить числа $\left(\frac{17}{18}\right)^{-\frac{1}{3}}$ и $\left(\frac{18}{17}\right)^{-\frac{1}{3}}$.

▶ Так как $\frac{17}{18} < 1$, а $\frac{18}{17} > 1$, то $\frac{17}{18} < \frac{18}{17}$. Возведя это неравенство в отрицательную степень $\left(-\frac{1}{3}\right)$, получаем $\left(\frac{17}{18}\right)^{-\frac{1}{3}} > \left(\frac{18}{17}\right)^{-\frac{1}{3}}$. ◁

Задача 3. Решить уравнение $10^x = 1$.

▶ Число $x = 0$ является корнем уравнения, так как $10^0 = 1$. Покажем, что других корней нет. Запишем уравнение в виде $10^x = 1^x$. Если $x > 0$, то $10^x > 1^x$, и, следовательно, уравнение не имеет положительных корней.
Если $x < 0$, то $10^x < 1^x$, и, следовательно, уравнение не имеет отрицательных корней. Таким образом, $x = 0$ — единственный корень уравнения $10^x = 1$. ◁

Аналогично доказывается, что уравнение $a^x = 1$, где $a > 0$, $a \neq 1$, имеет единственный корень $x = 0$.

! Равенство $a^x = a^y$, где $a > 0$, $a \neq 1$, верно только при $x = y$.

● Умножая равенство $a^x = a^y$ на a^{-y}, получаем $a^{x-y} = 1$, откуда $x = y$. ○

Задача 4. Решить уравнение $3^{2x-1} = 9$.

▶ $3^{2x-1} = 3^2$, откуда $2x - 1 = 2$, $x = 1{,}5$. ◁

Устные вопросы и задания

1. Из какого свойства числовых неравенств следует неравенство $a^n > b^n$ при $a > b > 0$ и натуральном n?
2. Сформулировать свойство возведения в рациональную степень неравенства с положительными левой и правой частями.
3. Привести примеры сравнения степеней, у которых показатели степеней равные: положительные числа; отрицательные числа.
4. Найти корень уравнения $a^x = 1$, где $a > 0$, $a \neq 1$.
5. При каких значениях x и y верно равенство $a^x = a^y$, если $a > 0$, $a \neq 1$?

Вводные упражнения

1. Выполнить сложение и умножение неравенств:

   1) $15 > 3$ и $0{,}1 > 0{,}01$; 2) $12{,}5 > 4\frac{1}{3}$ и $2 > \frac{6}{7}$.

2. Сравнить числа:

1) $\frac{4}{15}$ и $\frac{7}{15}$; 2) $\frac{15}{17}$ и $\frac{15}{16}$; 3) $-\frac{7}{8}$ и $-\frac{3}{8}$;

4) $\frac{7}{9}$ и $\frac{9}{10}$; 5) 0,015 и −0,015; 6) 3,14 и π.

3. Сравнить значения степеней:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^4$ и $\left(\frac{1}{3}\right)^4$; 2) $\left(1\frac{1}{2}\right)^3$ и $\left(\frac{3}{5}\right)^3$; 3) $(0,2)^{-2}$ и $(0,3)^{-2}$; 4) 5^{-3} и 6^{-3}.

4. Решить уравнение: 1) $3x+7=\frac{1}{3}$; 2) $2-\frac{1}{2}x=3$.

Упражнения

(Устно.) Сравнить числа (76—77):

76. 1) $2^{\frac{1}{3}}$ и $3^{\frac{1}{3}}$; 2) $5^{-\frac{4}{5}}$ и $3^{-\frac{4}{5}}$.

77. 1) $(0,88)^{\frac{1}{6}}$ и $\left(\frac{6}{11}\right)^{\frac{1}{6}}$; 2) $\left(\frac{5}{12}\right)^{-\frac{1}{4}}$ и $(0,41)^{-\frac{1}{4}}$.

78. Решить уравнение:

1) $6^{2x}=6^{\frac{1}{5}}$; 2) $3^x=27$; 3) $7^{1-3x}=7^{10}$;

4) $2^{2x+1}=32$; 5) $4^{2+x}=1$; 6) $\left(\frac{1}{5}\right)^{4x-3}=5$.

79. Сравнить числа:

1) $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^2}$ и $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)^2}$; 2) $\sqrt[5]{\left(1\frac{1}{4}-1\frac{1}{5}\right)^3}$ и $\sqrt[5]{\left(1\frac{1}{6}-1\frac{1}{7}\right)^3}$.

Решить уравнение (80—82).

80. 1) $3^{2-y}=27$; 2) $3^{5-2x}=1$; 3) $9^{\frac{1}{2}x-1}-3=0$; 4) $27^{3-\frac{1}{3}y}-81=0$.

81. 1) $\left(\frac{1}{9}\right)^{2x-5}=3^{5x-8}$; 2) $2^{4x-9}=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-4}$;

3) $8^x4^{x+13}=\frac{1}{16}$; 4) $\frac{25^{x-2}}{\sqrt{5}}=\left(\frac{1}{5}\right)^{x-7,5}$.

82. 1) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2x+1} = (3\sqrt{3})^x$; 2) $(\sqrt[3]{2})^{x-1} = \left(\frac{2}{\sqrt[3]{2}}\right)^{2x}$;

3) $9^{3x+4}\sqrt{3} = \frac{27^{x-1}}{\sqrt{3}}$; 4) $\frac{8}{(\sqrt{2})^x} = 4^{3x-2}\sqrt{2}$.

Разговор о важном

Знаете ли вы, что алгебру иногда называют *арифметикой семи действий*? При этом подразумевают, что она занимается, помимо четырёх общеизвестных действий, ещё тремя: возведением в степень и двумя обратными ему действиями.

С возведением числа в степень мы познакомились ещё в 7 классе. В 8 классе познакомились с извлечением квадратного корня из числа. И только что научились извлекать корень любой натуральной степени из положительного числа.

Я понимаю, что извлечение корня — это обратная операция возведению числа в степень. Но вы сказали, что у возведения в степень две обратные операции? Какая же вторая?

Если вы возводите неизвестное положительное число x, например, в квадрат (т. е. находите $a = x^2$), то операция нахождения числа x по известной его второй степени (по числу a) — обратная операция, называющаяся нахождением арифметического квадратного корня из числа a ($\sqrt{a} = x$). Но если, например, вам известно, что $2^x = 8$, то операция нахождения показателя x также является обратной операцией к операции возведения в степень.

Рассмотрим уравнение $a^x = b$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$.

Можно доказать, что это уравнение имеет единственный корень x_0. Число x_0 называют **логарифмом числа b по основанию a** и обозначают $\log_a b$. Например, корнем уравнения $3^x = 9$ является число 2, т. е. $\log_3 9 = 2$. Точно так же $\log_2 16 = 4$, так как $2^4 = 16$; $\log_5 \frac{1}{5} = -1$, так как $5^{-1} = \frac{1}{5}$; $\log_{\frac{1}{3}} 27 = -3$, так как $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 27$.

Логарифм числа b по основанию 10 называют **десятичным логарифмом** и обозначают $\lg b$. Например, $\lg 100 = 2$, так как $10^2 = 100$; $\lg 0{,}001 = -3$, так как $10^{-3} = 0{,}001$.

С помощью микрокалькулятора, имеющего клавишу $\boxed{\lg}$, решим уравнение $10^{3x+1} = 5$ (с точностью до 0,1).

▶ $3x + 1 = \lg 5$, откуда $x = \frac{1}{3}(\lg 5 - 1)$. Вычисления проведём по программе:

$$5 \boxed{\lg} \boxed{-} 1 \boxed{+} 3 \boxed{=} -\underline{0{,}1003433}.$$

Ответ. $x \approx -0{,}1$. ◀

83. Вычислить: 1) $\log_7 49$; 2) $\log_2 64$; 3) $\log_{\frac{1}{2}} 4$; 4) $\log_3 \frac{1}{27}$.

84. Вычислить на микрокалькуляторе с точностью до 0,1:
1) $\lg 23$; 2) $\lg 131$; 3) $40 \lg 2$; 4) $57 \lg 3$.

85. С помощью микрокалькулятора найти с точностью до 0,01 корень уравнения:
1) $10^{2x-1} = 7$; 2) $10^{1-3x} = 6$.

Шаг вперёд

Степень с рациональным показателем в уравнении с параметром

Предлагаю вам проверить свои знания и понимание теоретического материала в ходе решения следующей задачи: «При каком значении a уравнение

$$x^{-\frac{8}{3}} - (a+1)\,x^{-\frac{4}{3}} + 2a - 2 = 0 \qquad (1)$$

имеет единственный корень?»

В первую очередь нужно отметить, что неизвестное в уравнении встречается как основание степени с рациональным показателем и показатель этот отрицателен. Значит $x > 0$.

Это уравнение квадратное относительно $x^{-\frac{4}{3}}$. Если ввести обозначение $t = x^{-\frac{4}{3}}$, то уравнение (1) запишется в виде

$$t^2 - (a+1)\,t + 2a - 2 = 0. \qquad (2)$$

Любой положительный корень t этого уравнения даст возможность найти один корень уравнения (1):

$$x^{-\frac{4}{3}} = t,\ \text{откуда}\ \left(x^{-\frac{4}{3}}\right)^{-\frac{3}{4}} = t^{-\frac{3}{4}},\ \text{т. е.}\ x = t^{-\frac{3}{4}}.$$

А в каком же случае уравнение (2) будет иметь единственный корень $t > 0$?

Если при дискриминанте D, равном нулю, будем иметь $t > 0$.

Верно, но есть ещё один вариант: когда при $D > 0$ (т. е. при наличии двух корней уравнения) только один корень будет положительным.

Значит, рассматриваем два случая:

1) $D = 0$, т. е. $(a+1)^2 - 4\,(2a-2) = 0$, откуда $(a-3)^2 = 0$ и $a = 3$.

Находим корень уравнения (2): $t = \frac{a+1}{2}$. При $a=3$ имеем $t=2>0$.

2) $D>0$, тогда $t_{1,2} = \frac{a+1\pm(a-3)}{2}$, откуда $t_1 = a-1$, $t_2 = 2$. Так как $t_2>0$, то при условии $t_1 \leqslant 0$, т. е. при $a \leqslant 1$, уравнение (1) будет иметь ровно один корень.

Значит, ответ к задаче будет таким: «Уравнение (1) имеет один корень при $a=3$ и при $a \leqslant 1$»?

Ответ верный. А для самостоятельной работы предлагаю вам следующие задачи.

1. При каких значениях a уравнение

$$4x^{-\frac{2}{5}} + (a^4 + 7a^2 + 3)\,x^{-\frac{1}{5}} + a^2 - a - 6 = 0$$

имеет один корень? (Ответ. При $-2 < a < 3$.)

2. Сколько корней имеет уравнение $x^{3,2} + (2a-3)\cdot x\sqrt[5]{x^3} - 6a = 0$? Найти эти корни. (Ответ. При $a=-1,5$ и $a>0$ один корень: $x=\sqrt[8]{243}$; при $a \leqslant 0$ и $a \neq -1,5$ два корня: $x_1 = \sqrt[8]{243}$, $x_2 = \sqrt[8]{-32a^5}$.)

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ I

86. Вычислить:

1) $(0,175)^0 + (0,36)^{-2} - 1^{\frac{4}{3}}$;
2) $1^{-0,43} - (0,008)^{-\frac{1}{3}} + (15,1)^0$;
3) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-2} - \left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}} + 4\cdot 379^0$;
4) $(0,125)^{-\frac{1}{3}} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - (1,85)^0$.

87. Вычислить:

1) $9,3\cdot 10^{-6} : (3,1\cdot 10^{-5})$;
2) $1,7\cdot 10^{-6}\cdot 3\cdot 10^7$;
3) $8,1\cdot 10^{16}\cdot 2\cdot 10^{-14}$;
4) $6,4\cdot 10^5 : (1,6\cdot 10^7)$;
5) $2\cdot 10^{-1} + \left(6^0 - \frac{1}{6}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^{-1}$;
6) $3\cdot 10^{-1} - \left(8^0 - \frac{1}{8}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^4\cdot\left(\frac{5}{7}\right)^{-1}$.

88. Найти значение выражения:

1) $\left(\frac{x^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{5}{6}}}{x^{\frac{1}{6}}}\right)^{-2}$ при $x = \frac{7}{9}$;
2) $\left(\frac{a^{\frac{2}{3}}\cdot a^{\frac{1}{9}}}{a^{-\frac{2}{9}}}\right)^{-3}$ при $a = 0,1$.

89. Упростить выражение:

1) $(\sqrt[3]{125x} - \sqrt[3]{8x}) - (\sqrt[3]{27x} - \sqrt[3]{64x})$;

2) $(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{16x}) + (\sqrt[4]{81x} - \sqrt[4]{625x})$;

3) $\left(\frac{3}{\sqrt{1+a}} + \sqrt{1-a}\right) : \frac{3+\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1+a}}$; 4) $\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}\right) : (\sqrt{x^2-y^2} - x)$.

90. Решить уравнение:

1) $7^{5x-1} = 49$; 2) $(0,2)^{1-x} = 0,04$;

3) $\left(\frac{1}{7}\right)^{3x+3} = 7^{2x}$; 4) $3^{5x-7} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$.

91. Вычислить:

1) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} + 10\,000^{0,25} - \left(7\frac{19}{32}\right)^{\frac{1}{5}}$; 2) $(0,001)^{-\frac{1}{3}} - 2^{-2} \cdot 64^{\frac{2}{3}} - 8^{-1\frac{1}{3}}$;

3) $27^{\frac{2}{3}} - (-2)^{-2} + \left(3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}$; 4) $(-0,5)^{-4} - 625 - \left(2\frac{1}{4}\right)^{-1\frac{1}{2}}$.

92. При каких значениях x имеет смысл выражение:

1) $\sqrt[4]{x^2-4}$; 2) $\sqrt[3]{x^2-5x+6}$; 3) $\sqrt[4]{\frac{x-2}{x+3}}$;

4) $\sqrt[4]{x^2-5x+6}$; 5) $\sqrt[4]{x^3-x}$; 6) $\sqrt[4]{x^3-5x^2+6x}$?

93. Упростить выражение:

1) $\frac{a^{\frac{1}{4}} - a^{-\frac{7}{4}}}{a^{\frac{1}{4}} - a^{-\frac{3}{4}}}$; 2) $\frac{a^{\frac{4}{3}} - a^{-\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}} - a^{-\frac{2}{3}}}$; 3) $\frac{b^{\frac{5}{4}} + 2b^{\frac{1}{4}} + b^{-\frac{3}{4}}}{b^{\frac{3}{4}} + b^{-\frac{1}{4}}}$;

4) $\frac{a^{-\frac{4}{3}}b^{-2} - a^{-2}b^{-\frac{4}{3}}}{a^{-\frac{5}{3}}b^{-2} - b^{-\frac{5}{3}}a^{-2}}$; 5) $\frac{\sqrt{a^3b^{-1}} - \sqrt{a^{-1}b^3}}{\sqrt{ab^{-1}} - \sqrt{a^{-1}b}}$; 6) $\frac{a^{\frac{3}{4}}b^{-\frac{1}{4}} - a^{-\frac{1}{4}}b^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{1}{4}}b^{-\frac{1}{4}} + a^{-\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}}$.

94. Сравнить ребро куба объёмом 100 см^3 с радиусом шара такого же объёма. (Объём шара радиуса R вычисляется по формуле $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.)

95. С помощью микрокалькулятора вычислить период колебаний маятника длиной 18,5 см по формуле $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, где l — длина маятника (в метрах), $g \approx 9,8$ м/с^2, T — период колебаний маятника (в секундах).

ПРАКТИЧЕСКИЕ И ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ

1. В сельском хозяйстве приблизительный объём зерна пшеницы, сгруженного в насыпь, имеющую форму конуса, находят по формуле $V = \frac{p^3}{20}$, где p — длина так называемой «перекидки», находящаяся с помощью шнура, перекинутого через кучу зерна (на рисунке 1 $p = AB + BC$). Найти объём ссыпанного в коническую кучу зерна, если $p = 10$ м; $p = 20$ м.

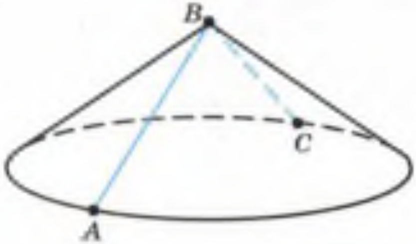


Рис. 1

2. Коэффициент роста производства K_n в n-м году находится как отношение объёма производства N_n в этом году к объёму производства прошлого года N_{n-1}, т. е. $K_n = \frac{N_n}{N_{n-1}}$. Среднегодовой темп роста производства K за m лет находится по формуле $K = \sqrt[m]{K_n \cdot K_{n+1} \cdot \ldots \cdot K_{n+m}}$. Производство продукции сельского хозяйства в России за период 2001—2004 гг. отражено в таблице:

Год	2001	2002	2003	2004
Объём производства N (млрд р.)	961	1029	1155	1363

Вычислить среднегодовой темп роста производства в России за период 2002—2004 гг.

3. При массовом учёте *делового леса* используют следующую формулу для нахождения объёма одного бревна: $V = \pi l \left(\frac{R+r}{2}\right)^2$, где R и r — радиусы торцов бревна, l — длина бревна. Найти примерный объём древесины от 200 брёвен, имеющих одинаковые размеры: $l \approx 6$ м, $R \approx 0{,}18$ м, $r \approx 0{,}16$ м.

4. При посеве семена скатываются на дно бороздок, сделанных в почве сошниками. Осыпающаяся затем со стенок бороздок земля покрывает семена рыхлым слоем. Толщина этого слоя l называется *глубиной заделки семян.* Глубина заделки в сухой песчаной почве определяется по формуле $l = h - 7,2 \cdot x^{0,4}$, где h — глубина бороздки (в мм), x — расстояние между стенками сошника (в мм). Определить глубину заделки семян, если $h = 60$ мм, $x = 32$ мм.

5. При конструировании зерноочистительных машин важным параметром является так называемый *приведённый размер d зерна*, для очистки которого будет работать машина. Величину d находят по формуле $d = \sqrt[3]{abl}$, где a — толщина зерна, b — ширина, l — длина (все размеры выражают в мм). Для зерновых культур некоторого региона $1,2 < a < 4$; $1,5 < b < 5,1$; $4,5 < l < 19$. Найти границы изменения величины d зерна в этом регионе.

6. Если к леске привязать груз и начать раскручивать этот груз, постепенно увеличивая частоту вращения, наступит момент, в который леска разорвётся. В курсе физики предел прочности σ (сопротивление на разрыв) материала, из которого изготовлена леска, находится по формуле $\sigma = 16\pi n^2 mRD^{-2}$, где n — частота вращения (число оборотов за 1 с), m — масса вращающегося груза (в кг), R — радиус вращения (в м), D — диаметр лески (в м). Найти предел прочности металлической лески, если $D = 10^{-3}$, $R = 0,8$, $m = 5$, $n = 2$.

В этой главе вы узнали,

что такое:

— степень с целым отрицательным показателем;
— степень с нулевым показателем;
— арифметический корень натуральной степени;
— корень третьей степени из отрицательного числа;
— степень с рациональным показателем;

как:

— применять свойства степени с целым показателем;
— представлять число в виде корня третьей степени;
— применять для вычислений свойства арифметического корня третьей степени;
— представлять степень с рациональным показателем в виде арифметического корня, а арифметический корень — в виде степени;
— возводить в степень числовое неравенство, у которого левая и правая части положительны;
— сравнивать степени с одинаковыми рациональными показателями.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

I уровень

1. Вычислить:

а) $3^{-5}:3^{-7}-2^{-2}\cdot 2^{4}+\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\right)^{3}$;

б) $\sqrt[5]{3^{10}\cdot 32}-\frac{\sqrt[3]{48}}{\sqrt[3]{2}\,\sqrt[3]{3}}$;

в) $25^{\frac{3}{2}}\cdot 25^{-1}+(5^{3})^{\frac{2}{3}}:5^{3}-48^{\frac{2}{3}}:6^{\frac{2}{3}}$.

2. Записать числа 8600 и 0,0078 в стандартном виде и найти их произведение и частное.

3. Упростить выражение:

а) $\frac{3x^{-9}\cdot 2x^{5}}{x^{-4}}$; б) $(x^{-1}+y^{-1})\cdot\left(\frac{1}{xy}\right)^{-2}$.

4. Упростить выражение $\frac{a^{\frac{5}{3}}}{\sqrt[3]{a^{2}}\cdot a^{\frac{1}{4}}}$ и найти его числовое значение при $a=81$.

5. Сравнить числа: $(0,78)^{\frac{2}{3}}$ и $(0,67)^{\frac{2}{3}}$; $(3,09)^{-\frac{1}{3}}$ и $(3,08)^{-\frac{1}{3}}$.

II уровень

6. Найти значение числового выражения:

а) $\left((0,27)^{0}\right)^{-2,7}-\frac{8}{25}\cdot 81^{\frac{1}{4}}-(-5)^{-2}+8,1^{-7}\cdot 8,1^{7}$; б) $\frac{45^{\frac{3}{8}}\cdot 3^{-\frac{5}{8}}}{3^{-\frac{1}{4}}\cdot 15^{-\frac{5}{8}}}$.

7. Сравнить значения числовых выражений $0,2\cdot\sqrt[6]{(-5)^{18}}$ и $10\sqrt{\frac{1}{4}\sqrt[4]{625}}$.

8. Упростить выражение $\left(1-2a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}}+ab^{-1}\right):\frac{b^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}}{b}$ и найти его числовое значение при $a=0,49$, $b=1,21$.

9. Решить уравнение $2^{3x^{2}-1}=4^{x}$.

III уровень

10. Найти значение выражения:

$$(-1{,}5)^{-3}-\left(\frac{2}{5}\right)^{-4}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{3}-\left(\left(\frac{7}{9}\right)^{0{,}7}\right)^{0}+16^{\frac{3}{4}}\cdot 0{,}5.$$

11. Найти числовое значение выражения $32\cdot a^2-4a-17$ при $a=\dfrac{3-2\sqrt{7}}{8}$.

12. Сравнить с нулём значение выражения $\dfrac{\sqrt[3]{9{,}7}-\sqrt[3]{8{,}1}}{\sqrt[4]{0{,}021}-\sqrt[4]{0{,}022}}$.

13. Упростить выражение:

$$\left(\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{\frac{a^2-4}{a}}}+\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{\frac{a^2-4}{a}}}\right)^2\cdot\sqrt[4]{\frac{a^2}{4}}.$$

ТЕМЫ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ РАБОТ

1. История развития понятия степени.
2. Степень с рациональным показателем в химии, физике, биологии.
3. Запись чисел в двоичной системе счисления.
4. История знака корня.
5. Формулы приближённых вычислений корней.
6. Формулы Д. Кардано корней кубического уравнения.
7. Доказательство иррациональности числа $\sqrt[3]{5}$; $\sqrt[5]{3}$.
8. Десятичные логарифмы и их свойства.

ГЛАВА II

Степенная функция

В предыдущей главе вы изучили свойства степени с рациональными показателями и поняли, что многие явления природы описываются с помощью степеней с целыми или дробными показателями. С понятием функции (зависимой переменной) и способами её задания вы знакомы с 7 класса.

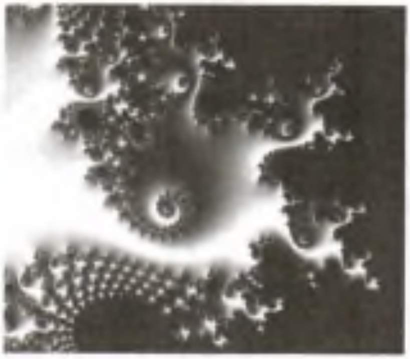
В этой главе вам предстоит расширить свои знания о функциях вида $y = x^r$, где r — рациональное число. Такие функции называют *степенными*. Часто степенными функциями называют и функции более общего вида $y = kx^r$, где k — некоторое число, отличное от нуля.

Одну из первых степенных зависимостей, существующих в природе, открыл И. Ньютон. Это был закон всемирного тяготения, согласно которому для двух произвольных тел сила взаимного притяжения F уменьшается пропорционально квадрату расстояния r между центрами масс этих тел: $F = \frac{k}{r^2}$. Аналогичная зависимость существует при взаимодействии двух точечных электрических зарядов — сила их взаимодействия уменьшается пропорционально квадрату расстояния между зарядами (закон *Кулона*). Таким образом, и закон всемирного тяготения, и закон Кулона описываются с помощью одной и той же математической модели — степенной функции $y = kx^{-2}$.

Степенные зависимости величин встречаются достаточно часто в самых различных областях знаний, а также в прикладных вопросах жизнедеятельности человека. Например, экономисты знают, что распределение людей в обществе по доходам подчиняется степенной зависимости (функция *Парето*). Степенной функцией описывается распределение слов в тексте (закон *Ципфа*).

В функциях вида $y = x^r$ показатели степеней на практике часто оказываются не только целыми, но и дробными. Например, в упомянутой функции Парето $N(Y) = \left(\frac{Y_m}{Y}\right)^{\alpha} \cdot 100$ (где $N(Y)$ — число семей, получающих доход не меньше Y,

Y_m — наименьший доход семей в обществе) значение показателя α может быть равным, например, $\frac{6}{5}$.



Для тех, кто любит самостоятельно узнавать новое, выходящее за рамки школьного учебника, предлагаем выяснить, что такое *фракталы* (один из фракталов изображён на рисунке справа), а также узнать о фрактальных степенных зависимостях.

При изучении этой главы вы вспомните, что с простейшими степенными функциями ($y=x$, $y=x^2$, $y=\frac{1}{x}$) вы уже знакомы. В этой главе вам предстоит научиться находить область определения функции, промежутки её знакопостоянства, промежутки возрастания и убывания, исследовать функцию на чётность или нечётность.

§ 6 Область определения функции

С понятием функции вы знакомы давно, но строгое определение этого понятия вы узнаете только сейчас — в этом параграфе. Вам предстоит также расширить свои знания о видах функций и их свойствах. Известные вам линейная и квадратичная функции были определены для всех действительных значений x. Однако существует множество функций, определённых на других промежутках. Например, функция $y=\sqrt{x}$ определена только для $x \geqslant 0$. В этом параграфе вы узнаете об одной из важнейших характеристик функции — области её определения.

Нужно вспомнить:

- понятия зависимой и независимой переменных;
- способы записи функциональной зависимости двух величин;
- способы задания функции;
- нахождение значения функции по заданному значению аргумента и нахождение значений аргумента по заданному значению функции (если функция задана формулой, графиком или таблицей);
- определение модуля числа;
- понятия корней второй и третьей степеней;
- нахождение числовых значений алгебраических выражений;
- решение линейных и квадратных уравнений, неравенств;
- построение графиков функций с помощью сдвигов.

! Определение. Если каждому значению x из некоторого множества чисел поставлено в соответствие число y, то говорят, что на этом множестве задана **функция** $y(x)$. При этом x называют **независимой переменной** или **аргументом**, а y — **зависимой переменной** или **функцией**.

Вы знакомы с линейной функцией $y = kx + b$ и квадратичной функцией $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

Для этих функций значение аргумента может быть любым действительным числом.

Рассмотрим теперь функцию, которая каждому неотрицательному числу x сопоставляет число $\sqrt{x}$, т. е. функцию $y = \sqrt{x}$. Для этой функции аргумент может принимать только неотрицательные значения: $x \geqslant 0$. В этом случае говорят, что функция определена на множестве всех неотрицательных чисел, и это множество называют областью определения функции $y = \sqrt{x}$.

Областью определения функции называют множество всех значений, которые может принимать её аргумент.

Например, функция, заданная формулой $y = \frac{1}{x}$, определена при $x \neq 0$, т. е. область определения этой функции — множество всех действительных чисел, отличных от нуля.

Если функция задана формулой, то принято считать, что она определена при всех тех значениях аргумента, при которых эта формула имеет смысл, т. е. выполнимы все действия, указанные в выражении, стоящем в правой части формулы.

Найти область определения функции, заданной формулой, — это значит найти все значения аргумента, при которых формула имеет смысл.

Задача 1. Найти область определения функции:

1) $y(x) = 2x^2 + 3x + 5$;
2) $y(x) = \sqrt{x-1}$;
3) $y(x) = \frac{1}{x+2}$;
4) $y(x) = \sqrt[4]{\frac{x+2}{x-2}}$.

▶ 1) Так как выражение $2x^2 + 3x + 5$ имеет смысл при любом x, то функция определена при всех x.

2) Выражение $\sqrt{x-1}$ имеет смысл при $x - 1 \geqslant 0$, т. е. функция определена при $x \geqslant 1$.

3) Выражение $\frac{1}{x+2}$ имеет смысл при $x+2 \neq 0$, т. е. функция определена при $x \neq -2$.

Рис. 2

4) Выражение $\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}$ имеет смысл при $\frac{x+2}{x-2} \geqslant 0$. Решая это неравенство, получаем (рис. 2): $x \leqslant -2$ и $x > 2$, т. е. функция определена при $x \leqslant -2$ и при $x > 2$.

Напомним, что **графиком функции** называется множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям независимой переменной из области определения этой функции, а ординаты — соответствующим значениям функции.

В 7 классе в рубрике «Шаг вперёд» было показано построение графика функции $y=|x|$. Рассмотрим эту функцию более детально и выявим её свойства.

Задача 2. Построить график функции $y=|x|$.

Известно, что $|x| = \begin{cases} x, \text{ если } x \geqslant 0, \\ -x, \text{ если } x < 0. \end{cases}$

Таким образом, выражение $|x|$ имеет смысл при любом действительном значении x, т. е. областью определения функции $y=|x|$ является множество всех действительных чисел.

Если $x \geqslant 0$, то $|x|=x$, и поэтому при $x \geqslant 0$ графиком является биссектриса первого координатного угла (рис. 3, *а*). Если $x<0$, то $|x|=-x$, и графиком функции $y=|x|$ является биссектриса второго координатного угла (рис. 3, *б*). График функции изображён на рисунке 3, *в*.

Заметим, что $|-x|=|x|$ для любого x, поэтому график функции $y=|x|$ симметричен относительно оси ординат.

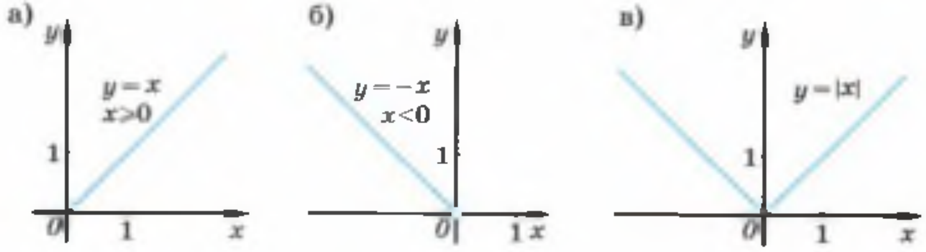


Рис. 3

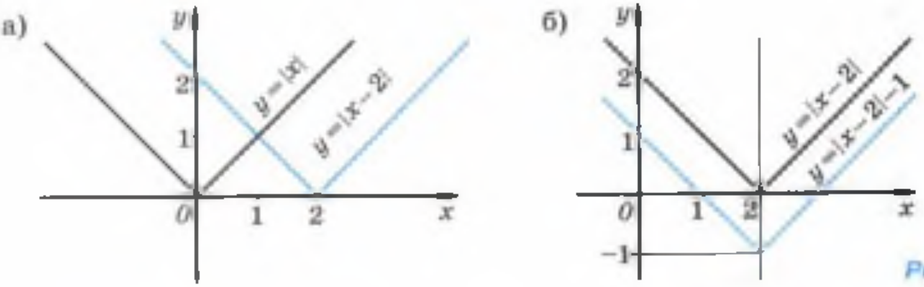


Рис. 4

Задача 3. Построить график функции $y = |x - 2| - 1$.

▶ График функции $y = |x - 2|$ получается из графика функции $y = |x|$ сдвигом вдоль оси Ox на 2 единицы вправо (рис. 4, *а*). Для получения графика функции $y = |x - 2| - 1$ достаточно сдвинуть график функции $y = |x - 2|$ на единицу вниз (рис. 4, *б*). ◁

Устные вопросы и задания

1. Что называется функцией?
2. Что называется областью определения функции?
3. Привести пример функции, областью определения которой является:
   1) множество всех действительных чисел;
   2) множество всех неотрицательных чисел;
   3) множество всех неположительных чисел;
   4) множество всех действительных чисел, отличных от нуля.
4. Как найти область определения функции, заданной формулой?
5. Какова область определения функции:

   линейной; квадратичной; $y = \sqrt{x}$; $y = \sqrt[3]{x}$; $y = |x|$?
6. Что нужно сделать, чтобы найти область определения функции:

   $y = \sqrt{x+5}$; $y = \sqrt{\dfrac{1}{x+5}}$?
7. Найти область определения функции $y = f(x)$, заданной графически на рисунке 5.

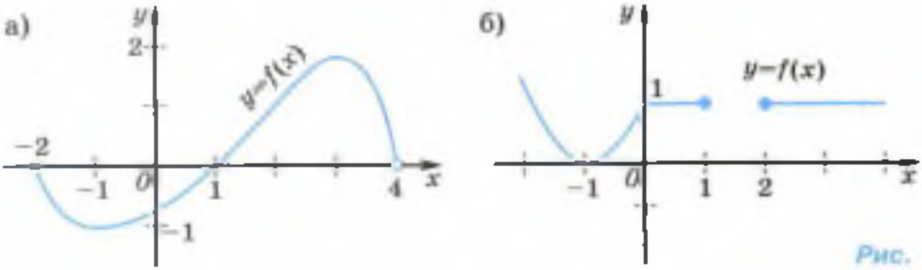


Рис. 5

8. Найти область определения функции $y = y(x)$, заданной таблицей:

1)

x	-2	1	0	1	2
$y(x)$	4	1	0	1	4

2)

x	0	1	4	9	16
$y(x)$	0	1	2	3	4

9. С помощью каких сдвигов графика функции $y = |x|$ можно получить график функции $y = |x+3| + 2$?

Вводные упражнения

1. Дана функция $y(x) = -2x - 3$. Найти:

1) $y(1)$; $y(-1)$; $y(0)$; $y\left(-\frac{1}{2}\right)$;

2) значения x, при которых $y(x) = 1$, $y(x) = -1$, $y(x) = 0$.

3) значения x, при которых функция принимает отрицательные значения.

2. Дана функция $y = x^2 - 4x + 4$. Найти:

1) значения x, при которых функция принимает положительные значения;

2) значение x, при котором функция принимает наименьшее значение.

3. Назвать сдвиги, с помощью которых из графика функции $y = x^2$ можно получить график функции: 1) $y = (x-1)^2 + 3$; 2) $y = x^2 + 6x + 9$.

4. При каких значениях x имеет смысл выражение: x^2; $\sqrt{x^2}$; $\sqrt{x}$; $\sqrt[3]{x}$; $\frac{1}{x}$; $\frac{2+x}{2-x}$; $\sqrt{\frac{1}{1+x}}$?

Упражнения

96. Функция задана формулой $y(x) = x^2 - 4x + 5$.

1) Найти $y(-3)$, $y(-1)$, $y(0)$, $y(2)$.

2) Найти значение x, если $y(x) = 1$, $y(x) = 5$, $y(x) = 10$, $y(x) = 17$.

97. Функция задана формулой $y(x) = \frac{x+5}{x-1}$.

1) Найти $y(-2)$, $y(0)$, $y\left(\frac{1}{2}\right)$, $y(3)$.

2) Найти значение x, если $y(x) = -3$, $y(x) = -2$, $y(x) = 13$, $y(x) = 19$.

Найти область определения функции (98—99).

98. (Устно.)

1) $y = 4x^2 - 5x + 1$; 2) $y = 2 - x - 3x^2$;

3) $y = \frac{2x-3}{x-3}$; 4) $y = \frac{3}{5-x^2}$; 5) $y = \sqrt{6-x}$; 6) $y = \sqrt{\frac{1}{x+7}}$.

99. 1) $y = \dfrac{2x}{x^2-2x-3}$; 2) $y = \sqrt[6]{\dfrac{2x+4}{3-x}}$;

3) $y = \sqrt[8]{3x^2-2x+5}$; 4) $y = \sqrt[6]{x^2-7x+10}$.

100. Функция задана формулой $y(x) = |2-x| - 2$.
1) Найти $y(-3)$, $y(-1)$, $y(1)$, $y(3)$.
2) Найти значение x, если $y(x) = -2$, $y(x) = 0$, $y(x) = 2$, $y(x) = 4$.

101. Найти область определения функции:

1) $y = \sqrt{\dfrac{x^2-4}{x+3}}$; 2) $y = \sqrt[4]{(x-1)(x-2)(x-3)}$;

3) $y = \sqrt[3]{\dfrac{1-x}{1+x}}$; 4) $y = \sqrt{(x+1)(x-1)(x-4)}$;

5) $y = \sqrt[6]{\dfrac{x^2+4x-5}{x-2}}$; 6) $y = \sqrt[6]{x} + \sqrt[5]{1+x}$.

Построить график функции (**102—103**):

102. 1) $y = |x+3| + 2$; 2) $y = -|x|$; 3) $y = 2|x| + 1$.

103. 1) $y = |x| + |x-2|$; 2) $y = |x+1| - |x|$.

Шаг вперёд

Область определения функции, заданной не формулой

Профессор, выполняя устные задания к этому параграфу, я поняла, что находить область определения функции проще всего, когда она задана таблицей или графиком (если он изображён полностью).

Действительно, в этих случаях сразу видны все значения аргумента, составляющие области определения.

Помню, Вы нам рассказывали о функциях, заданных *описанием* (фактически функция $y = |x|$ тоже задана описанием). Как для них находить область определения?

Для них как раз очень просто находить область определения. Познакомлю вас ещё с одной функцией, заданной описанием, а вы быстро найдёте её область определения. Функцию эту называют *функцией Дирихле* и обозначают $D(x)$:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ — рациональное число;} \\ 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное число.} \end{cases}$$

В данном случае очень просто найти область определения функции — читаем и объединяем всю информацию об упомянутых значениях x, они и составят область определения. Так что функция Дирихле определена для всех действительных x.

Верно. Так же несложно находить области определения функций, заданных на интервалах (такие функции иногда называют *кусочно заданными*). Самостоятельно найдите области определения и постройте графики следующих функций:

$$y=\begin{cases}|x^2-5x+6|, \text{ если } x\geqslant 2,\\ 2x-4, \text{ если } x<2;\end{cases} \quad \text{и} \quad y=\begin{cases}-x^2+|2x|-3, \text{ если } -2\leqslant x\leqslant 1,\\ -3x+1, \text{ если } 1<x<2;\\ -5, \text{ если } 2\leqslant x\leqslant 6.\end{cases}$$

§ 7 Возрастание и убывание функции

Вы уже умеете находить промежутки возрастания и убывания квадратичной функции по её графику. В этом параграфе будут даны общие определения возрастания и убывания функции. С помощью этих определений вы сможете по формуле, задающей функцию, устанавливать её возрастание или убывание на определённом промежутке.

Нужно вспомнить:

- определение функции;
- понятие области определения функции;
- нахождение по графику линейной (квадратичной) функции промежутков её возрастания, убывания;
- способы построения графиков линейной и квадратичной функций;
- нахождение координат точек пересечения графиков заданных функций;
- решение линейных и квадратных неравенств;
- представление корня в виде степени с рациональным показателем;
- нахождение числового значения степени с рациональным показателем.

Вы знакомы с функциями $y=x$ и $y=x^2$. Эти функции являются частными случаями **степенной функции**, т. е. функции

$$y=x^r,$$

где r — заданное число.

Степенная функция определена для тех значений x, при которых формула $y=x^r$ имеет смысл. Например, областью определения функций $y=x$ и $y=x^2$ ($r=1$ и $r=2$) является множество всех действительных чисел; областью определения функции $y=\frac{1}{x}$ ($r=-1$) является множество всех действительных чисел, не равных нулю;

областью определения функции $y = \sqrt{x}$ $\left(r = \frac{1}{2}\right)$ является множество всех неотрицательных чисел.

Определения. Функция $y(x)$ называется **возрастающей** на некотором промежутке, если для любых x_1, x_2, принадлежащих данному промежутку, таких, что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $y(x_2) > y(x_1)$.

Функция $y(x)$ называется **убывающей** на промежутке, если для любых x_1, x_2 из этого промежутка, таких, что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $y(x_2) < y(x_1)$.

Например, функция $y = x$ возрастает на всей числовой оси. Функция $y = x^2$ возрастает на промежутке $x \geqslant 0$, убывает на промежутке $x \leqslant 0$.

Докажем, что функция $y = \sqrt{x}$ возрастает на всей области определения, т. е. на промежутке $x \geqslant 0$.

Пусть $x_2 > x_1 \geqslant 0$. Возведя неравенство $x_2 > x_1$ в положительную степень $r = \frac{1}{2}$ (см. § 5), получим $x_2^{\frac{1}{2}} > x_1^{\frac{1}{2}}$, откуда $\sqrt{x_2} > \sqrt{x_1}$, т. е. $y(x_2) > y(x_1)$.

График функции $y = \sqrt{x}$ изображён на рисунке 6.

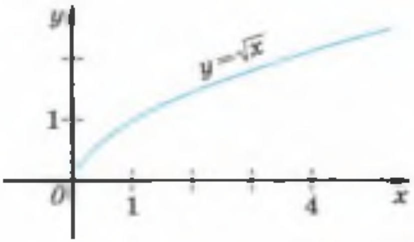


Рис. 6

Из рисунка 7 видно, что график функции $y = \sqrt{x}$ (т. е. график функции $y = x^{\frac{1}{2}}$) на промежутке $0 < x < 1$ лежит выше графика функции $y = x^2$, а на промежутке $x > 1$ — ниже графика функции $y = x^2$. Отсюда следует, например, что $0{,}7^2 < 0{,}7^{\frac{1}{2}}$ (так как $0 < 0{,}7 < 1$); $1{,}3^2 > 1{,}3^{\frac{1}{2}}$ (так как $1{,}3 > 1$).

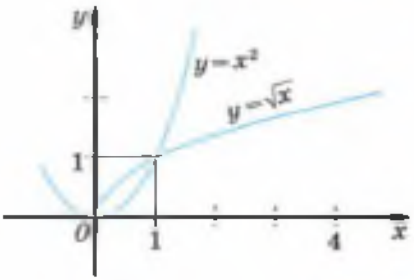


Рис. 7

Заметим, что промежутки $x \geqslant a$, $x > a$, $x \leqslant a$, $x < a$ можно записывать как $[a; +\infty)$, $(a; +\infty)$, $(-\infty; a]$, $(-\infty; a)$ соответственно. Например, промежуток $[3; +\infty)$ содержит все значения $x \geqslant 3$, а промежуток $(-\infty; 5)$ — значения $x < 5$.

Задача 1. Доказать, что функция $y = x^2 - 3$ убывает на промежутке $(-\infty; 0]$.

▷ Пусть $0 \geqslant x_2 > x_1$. Покажем, что $y(x_2) < y(x_1)$. Сравним с нулём разность $y(x_2) - y(x_1)$:

$$y(x_2) - y(x_1) = x_2^2 - 3 - (x_1^2 - 3) = x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) < 0,$$

так как $x_2 - x_1 > 0$ и $x_2 + x_1 < 0$. Значит, $y(x_2) < y(x_1)$. ◁

Задача 2. Доказать, что функция $y = x + \frac{1}{x}$ возрастает на промежутке $(1; +\infty)$.

▷ Пусть $x_2 > x_1 > 1$. Покажем, что $y(x_2) > y(x_1)$. Рассмотрим разность

$$y(x_2) - y(x_1) = x_2 + \frac{1}{x_2} - \left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right) = (x_2 - x_1)\frac{x_1x_2 - 1}{x_1x_2}.$$

Так как $x_2 > x_1$ и $x_1 > 1$ и $x_2 > 1$, то $x_2 - x_1 > 0$; так как $x_1x_2 > 1$, то $x_1x_2 - 1 > 0$ и $x_1x_2 > 0$. Поэтому $y(x_2) - y(x_1) > 0$, т. е. $y(x_2) > y(x_1)$. ◁

Устные вопросы и задания

1. Какую функцию называют степенной?
2. Найти область определения функции: $y = x$; $y = x^2$; $y = \sqrt{x}$; $y = x^{-1}$.
3. Какая функция называется возрастающей (убывающей) на некотором промежутке?
4. На каком промежутке функция $y = x^2$ возрастает; убывает?
5. На каком промежутке возрастает функция $y = \sqrt{x}$?

Вводные упражнения

1. Сравнить значения выражений:

   1) $(5,1)^2$ и $(3,8)^2$; 2) $\frac{1}{4,7}$ и $\frac{1}{4,8}$;

   3) $\frac{1}{-0,6}$ и $\frac{1}{-0,9}$; 4) $\sqrt{6,9}$ и $\sqrt{6,09}$.

2. Найти область определения функции:

   1) $y = x^2 + 3x$; 2) $y = \sqrt{x + 2}$;

   3) $y = \sqrt[3]{3 - x}$; 4) $y = \frac{1}{x - 7}$.

3. С помощью графика (рис. 8) найти промежуток, на котором квадратичная функция возрастает; убывает.

Упражнения

104. Построить график и найти промежутки возрастания и убывания функции:

1) $y = 2x + 3$; 2) $y = 1 - 3x$; 3) $y = x^2 + 2$;
4) $y = 3 - x^2$; 5) $y = (1 - x)^2$; 6) $y = (2 + x)^2$.

105. (Устно.) Сравнить степени:

1) $0{,}987^2$ и $0{,}986^2$; 2) $\left(-5\frac{1}{3}\right)^2$ и $\left(-5\frac{1}{2}\right)^2$;

3) $(3{,}26)^{\frac{1}{2}}$ и $(3{,}27)^{\frac{1}{2}}$; 4) $\left(\frac{5}{7}\right)^{\frac{1}{2}}$ и $\left(\frac{6}{7}\right)^{\frac{1}{2}}$.

106. Доказать, что функция возрастает на всей области определения: 1) $y = 13x - 1$; 2) $y = 0{,}7x + 6$.

107. Доказать, что функция убывает на всей области определения:

1) $y = -\frac{5}{9}x + 3$; 2) $y = -2{,}4x - 5$.

108. Построить на миллиметровой бумаге график функции $y = \sqrt{x}$. Найти по графику приближённо:

1) значения x, при которых $y = 0{,}5$; 1; 4; 2,5; 3,5; 3,8;
2) значения $\sqrt{1{,}5}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt{2{,}5}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{7{,}5}$; $\sqrt{10}$; $\sqrt{12}$.

109. Доказать, что функция:

1) $y = x^2 + 5$ возрастает на промежутке $[0; +\infty)$;
2) $y = x^2 - 7$ убывает на промежутке $(-\infty; 0]$;
3) $y = (x + 1)^2$ убывает на промежутке $(-\infty; -1]$;
4) $y = (x - 4)^2$ возрастает на промежутке $[4; +\infty)$;
5) $y = \frac{1}{x} - 9$ убывает на интервале $(-\infty; 0)$;

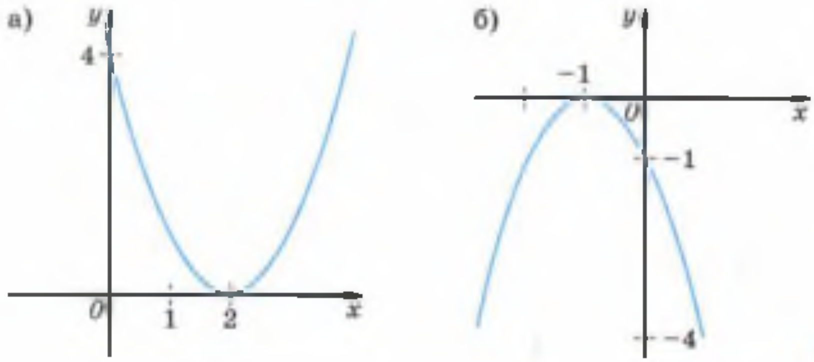


Рис. 8

6) $y=\frac{1}{x}+6$ убывает на интервале $(0; +\infty)$;

7) $y=\frac{1}{x+2}$ убывает на интервале $(-2; +\infty)$;

8) $y=\frac{1}{x-3}$ убывает на интервале $(-\infty; 3)$.

110. Доказать, что функция:

1) $y = x + \frac{1}{x}$ убывает на интервале $(0; 1)$;

2) $y = \frac{1}{x^2+1}$ убывает на промежутке $[0; +\infty)$ и возрастает на промежутке $(-\infty; 0]$;

3) $y = x^3 - 3x$ возрастает на промежутках $(-\infty; -1]$ и $[1; +\infty)$, убывает на отрезке $[-1; 1]$;

4) $y = x - 2\sqrt{x}$ возрастает на промежутке $[1; +\infty)$ и убывает на отрезке $[0; 1]$.

111. Построить график и найти промежутки возрастания и убывания функции:

1) $y = \begin{cases} x+2, & \text{если } x \leqslant -1, \\ x^2, & \text{если } x > -1; \end{cases}$ 2) $y = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \leqslant 1, \\ 2-x^2, & \text{если } x > 1. \end{cases}$

Разговор о важном

Профессор, пользуясь определениями возрастания и убывания функции, я смог выполнить все упражнения, кроме 110, 4). В этом задании мне не удалось представить разность $y(x_2) - y(x_1)$ в виде, удобном для сравнения с нулём.

Я помогу тебе:

$$y(x_2) - y(x_1) = x_2 - 2\sqrt{x_2} - \left(x_1 - 2\sqrt{x_1}\right) =$$

$$= x_2 - x_1 - 2\sqrt{x_2} + 2\sqrt{x_1} = \left(\sqrt{x_2}\right)^2 - \left(\sqrt{x_1}\right)^2 - 2\left(\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}\right) =$$

$$= \left(\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}\right)\left(\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}\right) - 2\left(\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}\right) =$$

$$= \left(\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}\right)\left(\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1} - 2\right).$$

Спасибо, Профессор, дальше я сам справлюсь.

Покажу вам полезный приём, использующийся при доказательстве возрастания или убывания функции, содержащей в своей формуле квадратные корни. Этот приём построен на знании основного свойства дроби и формулы разности квадратов.

Докажем, например, что функция $y = \sqrt{1-x}$ убывает на всей области определения (т. е. при $x \leqslant 1$).

Пусть $1 \geqslant x_2 > x_1$. Сравним с нулём $y(x_2) - y(x_1)$, помня о том, что $\sqrt{1-x} \geqslant 0$ при всех x из области определения:

$$\sqrt{1-x_2} - \sqrt{1-x_1} = \frac{\left(\sqrt{1-x_2} - \sqrt{1-x_1}\right)\left(\sqrt{1-x_2} + \sqrt{1-x_1}\right)}{\sqrt{1-x_2} + \sqrt{1-x_1}} =$$

$$= \frac{(1-x_2)-(1-x_1)}{\sqrt{1-x_2} + \sqrt{1-x_1}} = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{1-x_2} + \sqrt{1-x_1}}.$$

Полученная дробь меньше нуля, так как знаменатель полученной дроби положителен при $1 \geqslant x_2 > x_1$, а числитель отрицателен.

Иногда удаётся доказать возрастание или убывание функции $y = y(x)$ на некотором промежутке, анализируя условие $x_2 > x_1$ или $x_2 < x_1$, если x_1 и x_2 принадлежат исследуемому промежутку.

Можно таким образом доказать возрастание функции $y = \sqrt{x}$ на промежутке $[0; +\infty)$?

На этом примере я и продемонстрирую новый способ доказательства.

Пусть $x_2 > x_1 \geqslant 0$. Нужно доказать, что $\sqrt{x_2} > \sqrt{x_1}$. Так как $x_2 > x_1$, то $x_2 - x_1 > 0$. Но для неотрицательных x_2 и x_1 имеем $x_2 = \left(\sqrt{x_2}\right)^2$ и $x_1 = \left(\sqrt{x_1}\right)^2$. Значит, $\left(\sqrt{x_2}\right)^2 - \left(\sqrt{x_1}\right)^2 > 0$, откуда $\left(\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}\right)\left(\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}\right) > 0$. Так как $\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1} > 0$ при $x_2 > x_1 \geqslant 0$, то и $\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} > 0$ при $x_2 > x_1 \geqslant 0$, откуда $\sqrt{x_2} > \sqrt{x_1}$ на промежутке $[0; +\infty)$, что и требовалось доказать.

§ 8 Чётность и нечётность функции

Часто построение параболы начинают с проведения её оси симметрии. Затем после нахождения некоторых принадлежащих ей точек строят симметричные им относительно оси параболы. Параболы вида $y = ax^2$ и графики некоторых степенных функций симметричны относительно оси ординат. Такие функции являются четными. Существуют функции, графики которых симметричны относительно точки — начала координат, их называют нечётными, например, знакомая вам функция $y = kx$, где $k \neq 0$. В этом параграфе вы познакомитесь с определениями чётной и нечётной функций, построите графики отдельных чётных и нечётных степенных функций, обобщите их свойства.

Нужно вспомнить:

- понятие области определения функции;
- свойства и графики функций $y = x$; $y = x^2$; $y = |x|$;
- нахождение значений функции при $x = x_0$ и $x = -x_0$;
- определения возрастающей и убывающей функций;
- построение точки, симметричной данной относительно заданной прямой (точки);
- построение графиков функций с помощью сдвигов.

! Определение. Функция $y(x)$ называется **чётной**, если область её определения симметрична относительно начала координат и

$$y(-x) = y(x)$$

для любого x из области определения этой функции.

Например, чётными являются функции $y = x^2$ и $y = |x|$. Графики этих функций симметричны относительно оси ординат (рис. 9 и 10).

Задача 1. Построить график функции $y = x^3$.

1) Область определения функции $y = x^3$ — множество всех действительных чисел.

2) Значения функции $y = x^3$ положительны при $x > 0$; отрицательны при $x < 0$; $y = 0$ при $x = 0$.

3) Докажем, что график функции $y = x^3$ симметричен относительно начала координат.

● Пусть точка $(x_0; y_0)$ принадлежит графику функции $y = x^3$, т. е. $y_0 = x_0^3$. Точка, симметричная точке $(x_0; y_0)$ относительно начала координат, имеет координаты $(-x_0; -y_0)$. Эта точка также принадлежит графику функции $y = x^3$, так как, умножая обе части верного равенства $y_0 = x_0^3$ на -1, получаем $-y_0 = -x_0^3$, или $-y_0 = (-x_0)^3$. ○

Это свойство позволяет для построения графика функции $y = x^3$ построить сначала график для $x \geqslant 0$, а затем отразить его симметрично относительно начала координат.

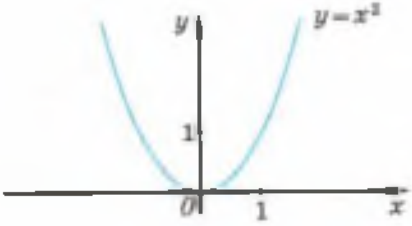


Рис. 9

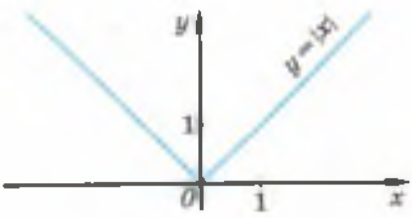


Рис. 10

4) Функция $y = x^3$ возрастает на всей области определения. Действительно, если $x_2 > x_1$, то

$$x_2^3 - x_1^3 = (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2) =$$

$$= (x_2 - x_1)\left(\left(x_2 + \frac{1}{2}x_1\right)^2 + \frac{3}{4}x_1^2\right) > 0,$$

т. е. $x_2^3 > x_1^3$.

5) Составив таблицу значений функции $y = x^3$ для некоторых значений $x \geqslant 0$ (например, для $x = 0, 1, 2, 3$), построим часть графика при $x \geqslant 0$ и затем с помощью симметрии — ту его часть, которая соответствует отрицательным значениям x (рис. 11). ◁

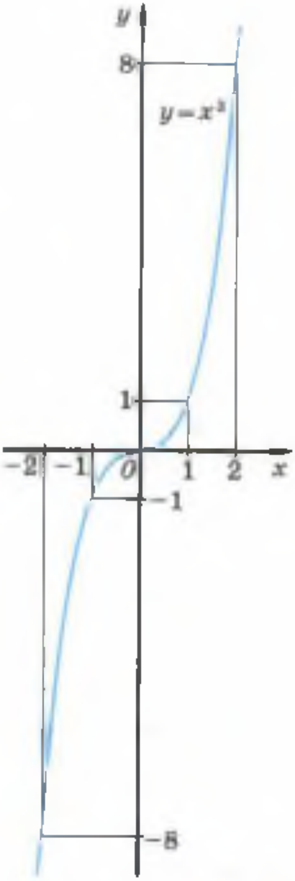


Рис. 11

! **Определение.** Функция $y(x)$ называется **нечётной**, если область её определения симметрична относительно начала координат и

$$y(-x) = -y(x)$$

для любого x из области определения этой функции.

Например, функции $y = x^3$, $y = \frac{1}{x^3}$ нечётные. Графики этих функций симметричны относительно начала координат.

Существуют функции, которые не обладают свойствами чётности или нечётности. Например, покажем, что функция $y = 2x + 1$ не является чётной и не является нечётной. Если бы эта функция была чётной, то равенство $2(-x) + 1 = 2x + 1$ выполнялось бы для всех x; но, например, при $x = 1$ это равенство неверно: $-1 \neq 3$. Если бы эта функция была нечётной, то тогда при всех x выполнялось бы равенство $2(-x) + 1 = -(2x + 1)$; но, например, при $x = 2$ это равенство неверно: $-3 \neq -5$.

Задача 2. Построить график функции $y = \sqrt[3]{x}$.

► 1) Область определения — все действительные числа.

2) Функция является нечётной, так как $\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x}$ для любого x.

3) При $x \geqslant 0$ функция возрастает, по свойству возрастания сте-

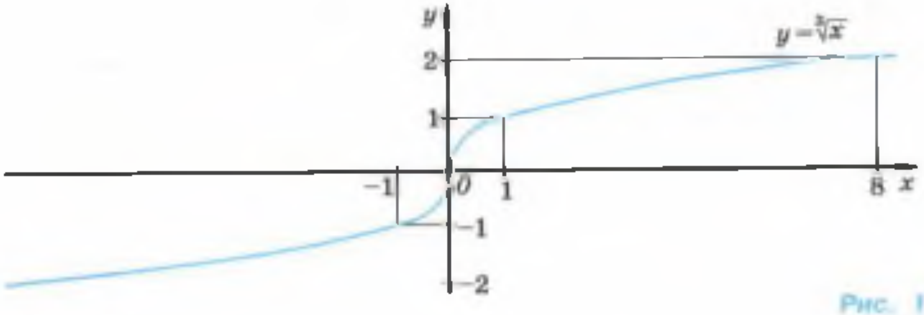


Рис. 12

пенной функции с положительным показателем, так как $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ при $x \geqslant 0$.

4) При $x > 0$ значения $y > 0$; $y(0) = 0$.

5) Найдя несколько точек, принадлежащих графику, построим часть графика для значений $x \geqslant 0$ и затем с помощью симметрии для значений $x < 0$ (рис. 12).

Отметим, что функция $y = \sqrt[3]{x}$ определена при всех x, а функция $y = x^{\frac{1}{3}}$ только при $x \geqslant 0$.

Устные вопросы и задания

1. Сформулировать определение чётной; нечётной функции.
2. Привести пример чётной функции; нечётной функции; функции, не являющейся ни чётной, ни нечётной.
3. Перечислить свойства функции: $y = x$; $y = x^2$; $y = x^3$; $y = \sqrt[3]{x}$.
4. Перечислить свойства функций $y = x^{\frac{1}{2}}$ и $y = x^{\frac{1}{3}}$.

Вводные упражнения

1. Назвать число, противоположное данному: -5; $-1\frac{1}{2}$; 0; 3; 7,4.
2. При $x = 5$ и $x = -5$ сравнить значения функции:
   1) $y(x) = x^2$; 2) $y(x) = x^3$; 3) $y(x) = \sqrt[3]{x}$; 4) $y(x) = |x|$.
3. Даны точки $A(1; 3)$; $B(-1; 3)$; $C(-1; -3)$; $D(1; -3)$. Какие из них симметричны относительно: оси Oy; начала координат?
4. Назвать координаты точки, симметричной точке $A(-2; 3)$; $B(-5; 0)$ относительно оси ординат.
5. Назвать координаты точки, симметричной точке $M(6; -4)$; $N(0; 3)$ относительно начала координат.

Упражнения

Выяснить, является ли функция чётной или нечётной (112—113).

112. 1) $y=2x^4$; 2) $y=3x^5$; 3) $y=x^2+3$; 4) $y=x^3-2$.

113. 1) $y=x^{-4}$; 2) $y=x^{-3}$; 3) $y=x^4+x^2$;

4) $y=x^3+x^5$; 5) $y=x^2-x+1$; 6) $y=\dfrac{1}{x+1}$.

114. Построить эскиз графика функции:

1) $y=x^4$; 2) $y=x^5$.

115. Показать, что функция не является чётной и не является нечётной:

1) $y=\dfrac{x+2}{x-3}$; 2) $y=\dfrac{x^2+x-1}{x+4}$.

116. Выяснить, является ли функция чётной, нечётной или не является ни чётной, ни нечётной:

1) $y=x^4+2x^2+3$; 2) $y=x^3+2x+1$;

3) $y=\dfrac{3}{x^3}+\sqrt[3]{x}$; 4) $y=x^4+|x|$.

117. Используя симметрию, построить график чётной функции:

1) $y=x^2-2|x|+1$; 2) $y=x^2-2|x|$.

118. Используя симметрию, построить график нечётной функции:

1) $y=x|x|-2x$; 2) $y=x|x|+2x$.

$\boxed{119.}$ Построить график функции:

1) $y=\begin{cases} x^2, & \text{если } x \geqslant 0, \\ x^3, & \text{если } x<0; \end{cases}$ 2) $y=\begin{cases} x^3, & \text{если } x>0, \\ x^2, & \text{если } x \leqslant 0. \end{cases}$

Определить, при каких значениях аргумента значения функции положительны. Указать промежутки возрастания и убывания.

$\boxed{120.}$ Построить график функции y при $x>0$, если:

1) $y=x$; 2) $y=x^2$; 3) $y=x^2+x$; 4) $y=x^2-x$.

Достроить график каждой из функций для $x<0$ так, чтобы построенная линия была графиком:

а) чётной функции; б) нечётной функции.

Задать формулой каждую из полученных функций.

$\boxed{121.}$ Выяснить свойства функции и построить её график:

1) $y=\sqrt{x-5}$; 2) $y=\sqrt{x}+3$; 3) $y=x^4+2$;

4) $y=1-x^4$; 5) $y=(x+1)^3$; 6) $y=x^3-2$.

$\boxed{122.}$ Записать уравнение оси симметрии графика функции:

1) $y=(x+1)^6$; 2) $y=x^6+1$.

$\boxed{123.}$ Указать координаты центра симметрии графика функции:

1) $y=x^3+1$; 2) $y=(x+1)^3$.

Разговор о важном

Хочу обратить ваше внимание на то, что у чётных и нечётных функций области определения симметричны относительно начала координат. Если функция задана на несимметричной относительно начала координат области, то она не является ни чётной, ни нечётной. Например, функция $y = \sqrt{x}$ определена на промежутке $[0; +\infty)$, несимметричном относительно начала координат, значит, она ни чётная, ни нечётная. А как вы думаете, функция

$$y(x) = \begin{cases} x^2 + 5x + 6, \text{ если } -4 \leqslant x \leqslant -1, \\ 2, \text{ если } -1 < x < 1, \\ x^2 - 5x + 6, \text{ если } 1 \leqslant x \leqslant 4 \end{cases} \qquad (*)$$

является чётной или нечётной?

Область её определения, отрезок $[-4; 4]$, симметричен относительно начала координат. Если выполнится одно из условий $y(-x) = y(x)$ или $y(-x) = -y(x)$, то функция будет чётной или нечётной соответственно. Но как понять, что происходит с видом функции при замене x на $-x$, если функция задана на промежутках, как в этом случае?

Во всех строках описания функции замени x на $-x$ и посмотри, что получится. Хочу лишь обратить ваше внимание на тот факт, что если функция $y(x)$ имеет симметричную (относительно нуля) область определения, причём $y(0)$ равно числу, отличному от 0 (что мы имеем и в случае функции (*)), то говорить о возможной нечётности функции нельзя; такая функция будет либо чётной, либо ни чётной, ни нечётной. Для нечётной функции $y(x)$, в чью область определения входит число нуль, имеем $y(0) = 0$.

Как доказать это утверждение?

Для нечётной функции $y(x)$ по определению $y(-x) = -y(x)$, значит, и при $x = 0$ (если 0 входит в область определения) $y(-0) = -y(0)$, откуда $2 \cdot y(0) = 0$ и $y(0) = 0$.

Да, если бы подумал, и сам смог бы доказать... Возвращаюсь к исследованию функции (*). Произвожу замену x на $-x$:

$$y(-x) = \begin{cases} (-x)^2 + 5(-x) + 6, \text{ если } -4 \leqslant -x \leqslant -1, \\ 2, \text{ если } -1 < -x < 1, \\ (-x)^2 - 5(-x) + 6, \text{ если } 1 \leqslant -x \leqslant 4. \end{cases}$$

После умножения на -1 двойных неравенств во всех строках, получаю

$$y(-x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 6, \text{ если } 1 \leqslant x \leqslant 4, \\ 2, \text{ если } -1 < x < 1, \\ x^2 + 5x + 6, \text{ если } -4 \leqslant x \leqslant -1. \end{cases}$$

Получили $y(-x) = y(x)$. Значит, данная функция чётная.

Хорошо. Вы рассмотрели уже немало функций с целью проверки их на чётность или нечётность. Теперь подумайте: можно ли сразу определить, чётной или нечётной является функция $y(x) = x^3 \cdot \sqrt[3]{x} + x^2$, если мы уже доказали, что функции $y = x^3$ и $y = \sqrt[3]{x}$ нечётные, а функция $y = x^2$ чётная?

Разве существуют другие способы проверки функции на чётность, кроме как с помощью сравнения её значений при x и $-x$?

Существуют свойства любых чётных и нечётных функций, значительно упрощающие в ряде случаев исследование функции (заданной непростой формулой) на чётность. Нетрудно доказать (и вы можете это сделать самостоятельно) следующие утверждения, справедливые для функций с одинаковыми областями определения:

1) сумма чётных (нечётных) функций является чётной (нечётной) функцией;

2) произведение двух чётных или двух нечётных функций является чётной функцией;

3) произведение чётной и нечётной функций является нечётной функцией.

Значит, заданная вами функция $y(x) = x^3 \cdot \sqrt[3]{x} + x^2$ чётная, так как произведение двух нечётных функций $y = x^3$ и $y = \sqrt[3]{x}$ даёт чётную функцию, а в сумме с чётной функцией $y = x^2$ образуется чётная функция.

§ 9 Функция $y = \frac{k}{x}$

С обратной пропорциональной зависимостью величин вы уже встречались в курсе алгебры 7 класса. Многие физические величины находятся в обратной пропорциональной зависимости от другой величины. Например, время t, затрачиваемое на прохождение телом участка пути s (при равномерном прямолинейном движении), обратно пропорционально скорости v, с которой тело движется на этом участке: $t(v) = \frac{s}{v}$. Сила тока I на участке электрической цепи обратно пропорциональна сопротивлению R этого участка при постоянном напряжении U: $I(R) = \frac{U}{R}$.

Таким образом, функция $y(x) = \frac{k}{x}$ является математической моделью многих явлений и процессов, происходящих в природе. В этом параграфе вы познакомитесь со свойствами и графиками функций вида $y = \frac{k}{x}$ при различных значениях $k \neq 0$.

Нужно вспомнить:

- понятие области определения функции;
- понятие степенной функции;
- определения возрастания и убывания функции;
- выявление по графику промежутков возрастания (убывания) функции; промежутков знакопостоянства функции;
- определения чётной и нечётной функций;
- свойства симметрии графиков чётной функции (относительно оси ординат) и нечётной функции (относительно начала координат);
- построение графика функции с помощью сдвигов и растяжений.

Задача 1. Построить график функции $y = \frac{1}{x}$.

▶ 1) Область определения — все действительные числа, кроме нуля.

2) Принимает все действительные значения, кроме нуля.

3) Функция является нечётной, так как $\frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}$ при $x \neq 0$.

4) Функция убывает на промежутке $(0; +\infty)$. Действительно, если $x_2 > x_1 > 0$, то $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{x_1 - x_2}{x_2 x_1} < 0$, т. е. $\frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1}$.

5) При $x > 0$ функция принимает положительные значения.

6) Найдя несколько точек, принадлежащих графику, например точки $\left(\frac{1}{3}; 3\right)$, $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$, $(1; 1)$, $\left(2; \frac{1}{2}\right)$, построим часть графика для значений $x > 0$ и затем с помощью симметрии — его часть для значений $x < 0$ (рис. 13).

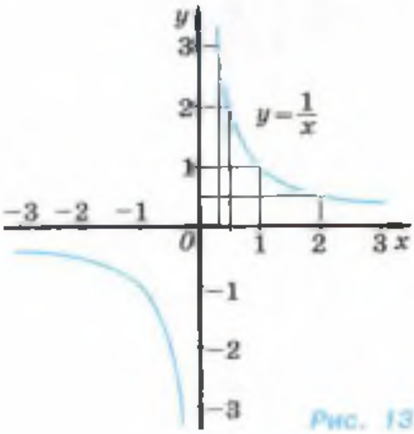


Рис. 13

График функции $y = \frac{1}{x}$ называют **гиперболой**. Она состоит из двух частей, называемых **ветвями гиперболы**. Одна ветвь расположена в первом квадранте, а другая — в третьем.

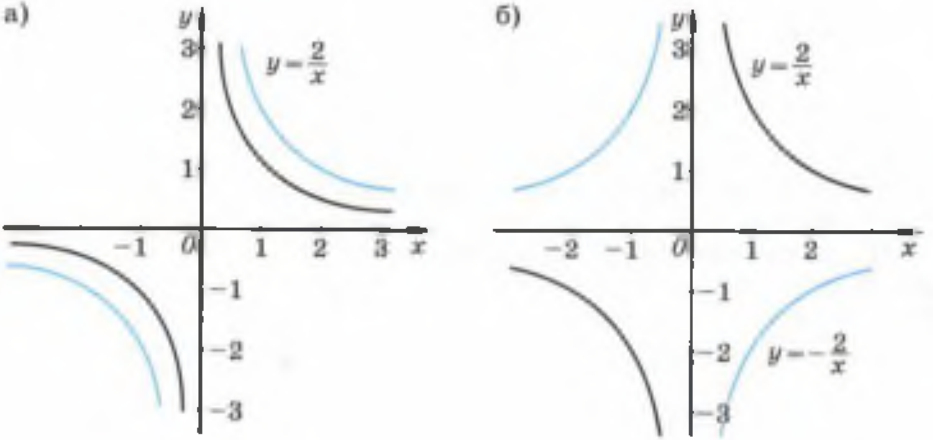


Рис. 14

Задача 2. Построить график функции $y = \frac{k}{x}$ при $k=2$ и $k=-2$.

▶ Заметим, что при одних и тех же значениях аргумента значения функции $y = \frac{2}{x}$ получаются умножением на 2 значений функции $y = \frac{1}{x}$. Это значит, что график функции $y = \frac{2}{x}$ получается растяжением графика функции $y = \frac{1}{x}$ от оси абсцисс вдоль оси ординат в 2 раза (рис. 14, *а*).

Значения функции $y=-\frac{2}{x}$ отличаются от значений функции $y=\frac{2}{x}$ при одних и тех же значениях аргумента только знаком, т. е., например, $y(1)=2$ для функции $y=\frac{2}{x}$ при $x=1$ и $y(1)=-2$ для функции $y=-\frac{2}{x}$. Следовательно, график функции $y = -\frac{2}{x}$ симметричен графику функции $y = \frac{2}{x}$ относительно оси абсцисс (рис. 14, *б*). ◁

График функции $y = \frac{k}{x}$ при любом $k \neq 0$ также называют **гиперболой. Гипербола имеет две ветви**, которые расположены в первом и третьем квадрантах, если $k>0$, и во втором и четвёртом квадрантах, если $k<0$.

Функция $y = \frac{k}{x}$, где $k > 0$, обладает такими же свойствами, что и функция $y = \frac{1}{x}$, а именно эта функция:

1) определена при $x \neq 0$;
2) принимает все действительные значения, кроме нуля;
3) нечётная;
4) принимает положительные значения при $x > 0$ и отрицательные при $x < 0$;
5) убывает на промежутках $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.

Если $k < 0$, то функция $y = \frac{k}{x}$ обладает свойствами 1—3, а свойства 4—5 формулируются так:

4) принимает положительные значения при $x < 0$ и отрицательные при $x > 0$;
5) возрастает на промежутках $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.

Говорят, что функция $y = \frac{k}{x}$ при $k > 0$ выражает **обратную пропорциональную зависимость** между x и y. Такая зависимость между величинами часто встречается в физике, технике и т. д.

Например, при равномерном движении по окружности с постоянной скоростью v тело имеет центростремительное ускорение a, равное $\frac{v^2}{r}$, где r — радиус окружности, т. е. в этом случае ускорение обратно пропорционально радиусу окружности.

Задача 3. Вычислить центростремительное ускорение Луны, которая движется вокруг Земли на расстоянии $3{,}84 \cdot 10^8$ м, совершая один оборот за 27,3 сут.

▶ Вычислим ускорение a по формуле $a = \frac{v^2}{r}$, где $v = \frac{C}{t}$, $C = 2\pi r$, $t = 27{,}3 \cdot 24 \cdot 3600$ с, $r = 3{,}84 \cdot 10^8$. Используя микрокалькулятор, получим

$$a = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot 3{,}84 \cdot 10^8}{(27{,}3 \cdot 24 \cdot 3600)^2} \approx 2{,}72 \cdot 10^{-3}.$$

Ответ. $2{,}72 \cdot 10^{-3}$ м/с². ◁

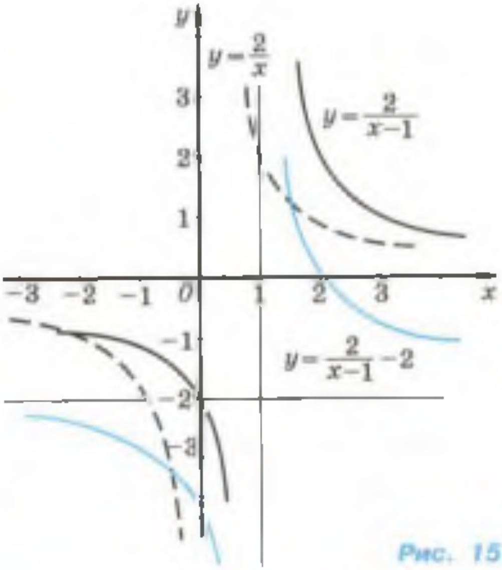


Рис. 15

Задача 4. Построить график функции $y = \frac{4-2x}{x-1}$.

▶ Преобразуем формулу, задающую функцию:

$$\frac{4-2x}{x-1} = \frac{-2x+2+2}{x-1} = \frac{-2(x-1)+2}{x-1} = \frac{-2(x-1)}{x-1} + \frac{2}{x-1} = \frac{2}{x-1} - 2.$$

График функции $y = \frac{2}{x-1} - 2$ можно построить, сдвигая график функции $y = \frac{2}{x}$ вдоль оси Ox вправо на единицу и вдоль оси Oy вниз на 2 единицы (рис. 15). ◁

Устные вопросы и задания

1. Привести примеры степенных функций, областью определения которых являются: 1) все действительные числа; 2) все действительные числа, отличные от нуля.
2. Назвать промежутки убывания функции $y = \frac{1}{x}$.
3. Как называют график функции $y = \frac{1}{x}$?
4. В каких квадрантах расположены ветви гиперболы:
   1) $y = \frac{3}{x}$; 2) $y = -\frac{2}{x}$; 3) $y = -\frac{2}{3x}$; 4) $y = \frac{1}{3x}$?
5. Какую зависимость между x и y называют обратной пропорциональной зависимостью?
6. Перечислить свойства функции $y = \frac{k}{x}$ при $k > 0$; $k < 0$.
7. Назвать сдвиги, с помощью которых можно получить график функции $y = \frac{2}{x-1} - 2$ из графика функции $y = \frac{2}{x}$.

Вводные упражнения

1. Найти область определения функции:
   1) $y = \frac{x^2}{2}$; 2) $y = \frac{2}{5x}$; 3) $y = \sqrt[3]{x+1}$; 4) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$.
2. Доказать, что функция $y = \frac{x^2}{3}$ возрастает при $x \geqslant 0$.
3. Доказать, что функция $y = \frac{2}{3x}$ является нечётной.
4. График функции $y = \frac{k}{x}$ проходит через точку $(-2; 3)$. Найти k.

Упражнения

124. Построить график функции $y = \frac{2}{x}$. Выяснить, при каких значениях x:

1) $y(x) = 4$; 2) $y(x) = -\frac{1}{2}$; 3) $y(x) > 1$; 4) $y(x) \leqslant 1$.

125. На одной координатной плоскости построить графики функций $y = \frac{1}{x}$ и $y = x$. Выяснить, при каких значениях x:

1) графики этих функций пересекаются; 2) график первой функции лежит выше (ниже) графика второй.

126. Не строя графики функций, найти координаты точек их пересечения:

1) $y = \frac{12}{x}$, $y = 3x$; 2) $y = -\frac{8}{x}$, $y = -2x$;

3) $y = \frac{2}{x}$, $y = x - 1$; 4) $y = \frac{6}{x+1}$, $y = x + 2$.

127. Построив графики функций, найти приближённые значения координат точек их пересечения:

1) $y = \frac{3}{x}$, $y = x + 1$; 2) $y = -\frac{3}{x}$, $y = 1 - x$;

3) $y = \frac{2}{x}$, $y = x^2 + 2$; 4) $y = \frac{1}{x}$, $y = x^2 + 4x$.

128. В цилиндре под поршнем при постоянной температуре находится газ. Объём V (в литрах) газа при давлении p (в атмосферах) вычисляется по формуле $V = \frac{12}{p}$.

1) Найти объём, занимаемый газом при 4 атм; 5 атм; 10 атм.
2) Вычислить, при каком давлении газ имеет объём 3 л, 5 л, 15 л.
3) Построить график зависимости объёма газа от его давления.

129. Сила тока в реостате I (в амперах) вычисляется по формуле $I = \frac{U}{R}$, где U — напряжение (в вольтах), R — сопротивление (в омах).

1) Построить график зависимости $I(R)$ при $U = 6$ В.
2) По графику приближённо найти: а) силу тока при сопротивлении, равном 6 Ом; 12 Ом; 20 Ом; б) сопротивление реостата при силе тока, равной 10 А; 5 А; 1,2 А.

130. Построить график функции:

1) $y = \frac{3}{x} - 2$; 2) $y = \frac{2}{x} + 1$; 3) $y = \frac{2}{x+2} - 1$; 4) $y = \frac{3}{1-x} + 1$.

131. Автомобиль движется по закруглению дороги радиусом 100 м со скоростью 20 м/с. Центростремительное ускорение a при движении по окружности находится по формуле $a = \frac{v^2}{R}$, где v — скорость движения, R — радиус окружности. Увеличится или уменьшится центростремительное ускорение автомобиля, если его скорость останется прежней, а радиус закругления дороги увеличится?

Диалог об истории

История функциональных понятий и гиперболоид инженера Гарина

В этой главе обобщим исторические сведения о функциональных понятиях, с которыми вы познакомились. Итак, понятие *функции*, как и сам этот термин (от лат. *function* — исполнение, осуществление), математики стали использовать с XVII в. после публикаций работ Р. Декарта, П. Ферма, Г. В. Лейбница и И. Ньютона. Однако многие конкретные функции и способы их задания были известны с древних времён.

Например, вавилонские мудрецы 4—5 тысяч лет назад для удобства в практических расчётах составляли таблицы значений выражений $10x$, $\frac{1}{x}$, x^2, $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$ и др., т. е. фактически исследовали некоторые степенные функции. В V в. до н. э. египетские цари брали с народа налог, пропорциональный площади имеющегося у каждого человека участка земли (т. е. находили значения функции вида $y = kx$).

О графической (в те годы геометрической) иллюстрации связей между величинами задумывались ещё учёные Александрийской школы. Так древнегреческий учёный *Менехм* в IV в. до н. э. изучал линии, получающиеся при различных сечениях конуса плоскостью (конические сечения). А в III в. до н. э. выдающийся греческий учёный *Аполлоний Пергский (262—190 гг. до н. э.)* записал уравнения этих линий и дал им названия: эллипс, парабола и гипербола. В неявном виде в его работах уже присутствовал метод координат, который окончательно оформился в трудах Р. Декарта. Разработанный Аполлонием «метод приложения площадей» (по-гречески называется παραβολή — читается как «парабола») позволил ему строить параболы и гиперболы, отражающие знакомые вам степенные зависимости.

Профессор, расскажите нам что-нибудь интересное о степенных функциях.

Имеется много задач механики, артиллерии, баллистики и других отраслей знаний, связанных с полётом тел в воздушном и безвоздушном пространстве и выводящих на использование свойств квадратичной параболы (с некоторыми подобными задачами я вас уже знакомил). А вот кубическая парабола $y = x^3$ используется в прямом смысле на земле. Форму кубической параболы имеет вставка в рельсах железных дорог, сглаживающая поворот от прямого к круговому участку пути. Рекомендую вам дополнительно почитать об оптических свойствах конических сечений и попробовать разобраться, какая ошибка кроется в названии книги А. Н. Толстого «Гиперболоид инженера Гарина».

§ 10 Неравенства и уравнения, содержащие степень

В этом параграфе показано применение свойств и графиков степенной функции для решения уравнений и неравенств, содержащих степени. В частности, рассмотрены иррациональные уравнения, сводящиеся к квадратным. К решению более сложных иррациональных уравнений вы ещё раз вернётесь в 10 классе.

Нужно вспомнить:

- свойства степенной функции с чётным, нечётным натуральным показателем;
- алгоритм построения графика чётной функции, нечётной функции;
- построение графика квадратичной функции.

Поведение степенной функции $y = x^r$ зависит от знака показателя степени r.

! Если $r > 0$, то степенная функция $y = x^r$ возрастает на промежутке $x \geqslant 0$.

Пусть $x_2 > x_1 \geqslant 0$. Возводя неравенство $x_2 > x_1$ в положительную степень r, получаем $x_2^r > x_1^r$, т. е. $y(x_2) > y(x_1)$.

Например, функции $y = x^{\frac{1}{2}}$ и $y = x^{\frac{3}{2}}$ возрастают на промежутке $x \geqslant 0$.

! **Если $r<0$, то степенная функция $y=x^r$ убывает на промежутке $x>0$.**

● Пусть $x_2>x_1>0$. Возводя неравенство $x_2>x_1$ в отрицательную степень r, по свойству неравенств, у которых левая и правая части положительны, получаем $x_2^r<x_1^r$, т. е. $y(x_2)<y(x_1)$. ○

Например, функция $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$, т. е. $y=x^{-\frac{1}{2}}$, убывает на промежутке $x>0$.

Свойства степенной функции используются при решении различных уравнений и неравенств.

Задача 1. Решить неравенство

$$x^5>32.$$

▶ Функция $y=x^5$ определена и возрастает при всех действительных значениях x. Так как $y(2)=32$, то $y(x)>32$ при $x>2$.

Ответ. $x>2$. ◁

Задача 2. Решить неравенство $x^4\leqslant 81$.

▶ Функция $y=x^4$ убывает при $x\leqslant 0$ и возрастает при $x\geqslant 0$. Уравнение $x^4=81$ имеет два действительных корня $x_1=-3$, $x_2=3$. Поэтому неравенство $x^4\leqslant 81$ при $x\leqslant 0$ имеет решения $-3\leqslant x\leqslant 0$ и при $x\geqslant 0$ — решения $0\leqslant x\leqslant 3$ (рис. 16).

Ответ. $-3\leqslant x\leqslant 3$. ◁

Задача 3. С помощью графиков решить уравнение $\frac{3}{x}=x^2+1$.

▶ На одной координатной плоскости построим графики функций $y=\frac{3}{x}$ и $y=x^2+1$ (рис. 17).

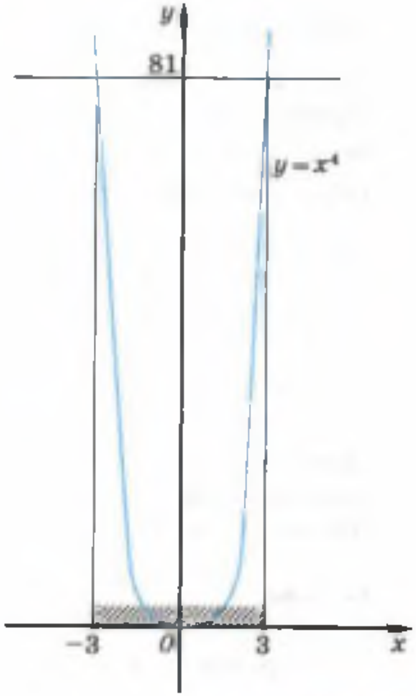


Рис. 16

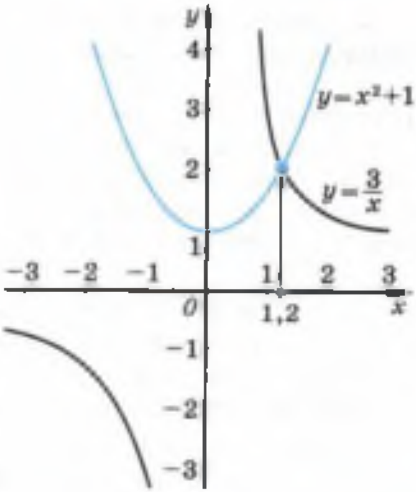


Рис. 17

При $x<0$ уравнение $\frac{3}{x}=x^2+1$ корней не имеет, так как $\frac{3}{x}<0$, а $x^2+1>0$. При $x>0$ это уравнение имеет один корень, равный абсциссе точки пересечения графиков этих функций. Из рисунка 17 видно, что $x_1\approx 1{,}2$. Других положительных корней уравнение не имеет, так как при $x>x_1$ функция $y=\frac{3}{x}$ убывает, а функция $y=x^2+1$ возрастает, и, следовательно, графики функций при $x>x_1$ не пересекаются. По той же причине они не пересекаются при $0<x<x_1$.
Ответ. $x\approx 1{,}2$. ◁

Задача 4. Решить уравнение

$$\sqrt{2-x^2}=x. \qquad (1)$$

▶ Пусть x — корень данного уравнения, т. е. x — такое число, при котором уравнение (1) обращается в верное равенство. Возведём обе части уравнения в квадрат:

$$2-x^2=x^2. \qquad (2)$$

Отсюда $x^2=1$, $x_{1,2}=\pm 1$.
Проверим, являются ли числа 1 и -1 корнями уравнения (1). При $x=1$ уравнение (1) обращается в верное равенство $\sqrt{2-1^2}=1$, поэтому $x=1$ — корень уравнения (1).
При $x=-1$ левая часть уравнения (1) равна $\sqrt{2-(-1)^2}=\sqrt{1}=1$, а правая равна -1, т. е. $x=-1$ не является корнем уравнения (1).
Ответ. $x=1$. ◁

В рассмотренной задаче уравнение (1) было решено с помощью возведения обеих частей этого уравнения в квадрат. При этом получилось уравнение (2). Уравнение (1) имеет только один корень $x=1$, а уравнение (2) — два корня $x_{1,2}=\pm 1$, т. е. при переходе от уравнения (1) к уравнению (2) появляется так называемый **посторонний корень**. Это произошло потому, что при $x=-1$ уравнение (1) обращается в неверное равенство $1=-1$, а при возведении обеих частей этого неверного равенства в квадрат получается верное равенство $1^2=(-1)^2$.

Таким образом, при возведении обеих частей уравнения в квадрат могут появиться посторонние корни.
При решении уравнения возведением в квадрат обеих его частей необходимо делать проверку.

Уравнение (1) — пример **иррационального уравнения**. Приведём ещё примеры иррациональных уравнений:

$$\sqrt{3-2x}=1-x; \quad \sqrt{x+1}=2-\sqrt{x-3}.$$

Рассмотрим решение нескольких иррациональных уравнений.

Задача 5*. Решить уравнение $\sqrt{5-2x}=1-x$.

▶ Возведя обе части уравнения в квадрат, получим

$$5-2x=x^2-2x+1, \text{ или } x^2=4,$$

откуда $x_1=2$, $x_2=-2$. Проверим, являются ли найденные числа корнями исходного уравнения.

При $x=2$ левая часть исходного уравнения равна $\sqrt{5-2\cdot 2}=1$, правая часть равна $1-2=-1$. Так как $1\neq -1$, то $x=2$ не является корнем исходного уравнения.

При $x=-2$ левая часть уравнения равна $\sqrt{5-2(-2)}=3$, правая часть равна $1-(-2)=3$. Следовательно, $x=-2$ — корень исходного уравнения.

Ответ. $x=-2$. ◁

Задача 6*. Решить уравнение $\sqrt{x-2}+3=0$.

▶ Запишем это уравнение в виде $\sqrt{x-2}=-3$. Так как арифметический корень не может быть числом отрицательным, то это уравнение корней не имеет.

Ответ. Корней нет. ◁

Задача 7*. Решить уравнение $\sqrt{x-1}+\sqrt{11-x}=4$.

▶ Возведя обе части уравнения в квадрат, получим

$$x-1+2\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{11-x}+11-x=16.$$

Приведём подобные члены и запишем уравнение в виде

$$2\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{11-x}=6, \text{ или } \sqrt{x-1}\cdot\sqrt{11-x}=3.$$

Возведя обе части последнего уравнения в квадрат, получим

$$(x-1)(11-x)=9, \text{ или } x^2-12x+20=0,$$

откуда $x_1=2$, $x_2=10$. Проверка показывает, что каждое из чисел 2 и 10 является корнем исходного уравнения.

Ответ. $x_1=2$, $x_2=10$. ◁

Устные вопросы и задания

1. На основании какого свойства функции $y=x^5$ в задаче 1 утверждается, что $y(x)>32$ при $x>2$ и $y(x)<32$ при $x<2$?
2. Какие свойства функции применяются при решении неравенства $x^4\leqslant 81$?
3. В чём состоит способ решения уравнения с помощью графиков?

4. Почему при $x<0$ уравнение $\frac{3}{x}=x^2+1$ не имеет корней?
5. Какими свойствами функции обосновывается наличие одного положительного корня уравнения $\frac{3}{x}=x^2+1$ в задаче 3?

Вводные упражнения

1. Сравнить степени:

1) $2^{\frac{1}{5}}$ и $3^{\frac{1}{5}}$; 2) $0{,}15^{-12}$ и $0{,}17^{-12}$;
3) $(-13)^4$ и $(-17)^4$; 4) $(-715)^{-1}$ и $(-717)^{-1}$.

2. Решить уравнение:

1) $x^3=0{,}001$; 2) $x^5=32$;
3) $x^3=-216$; 4) $x^4=625$.

3. На рисунке 18 изображены графики функций $y=y(x)$ и $y=a$. Найти значения x, при которых точки графика функции $y=y(x)$ расположены:
1) выше прямой $y=a$;
2) ниже прямой $y=a$.

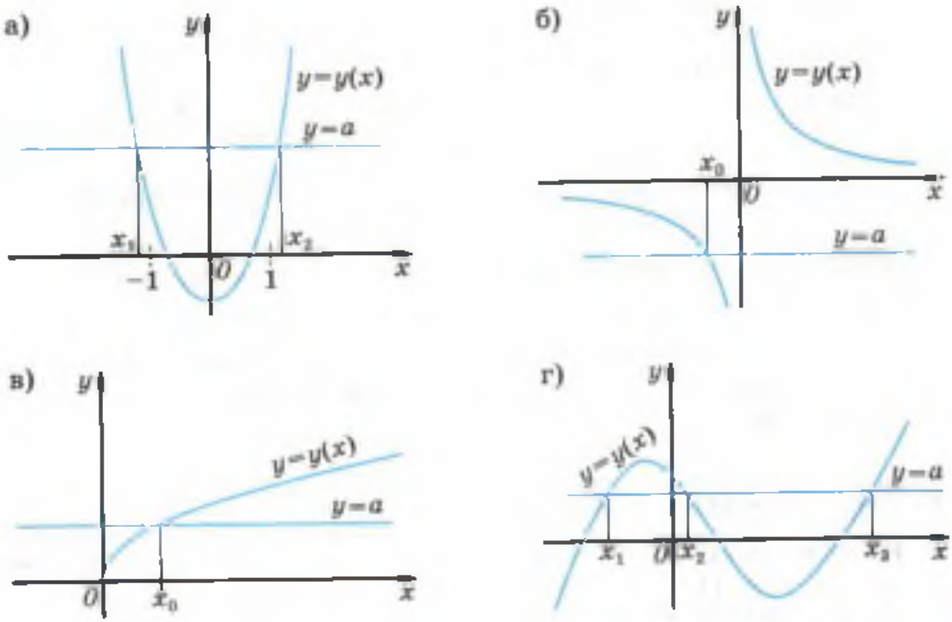


Рис. 18

Упражнения

132. Решить неравенство:

1) $x^7 > 1$; 2) $x^3 \leqslant 27$; 3) $x^3 \geqslant 64$;
4) $x^3 < 125$; 5) $x^4 \leqslant 16$; 6) $x^4 > 625$.

133. 1) Какой может быть сторона квадрата, если его площадь больше 361 см^2?

2) Каким может быть ребро куба, если его объём больше 343 дм^3?

134. (Устно.) Показать, что число 7 является корнем уравнения:

1) $\sqrt{x-3} = 2$; 2) $\sqrt{x^2-13} - \sqrt{2x-5} = 3$.

135. (Устно.) Решить уравнение:

1) $\sqrt{x} = 3$; 2) $\sqrt{x} = 7$; 3) $\sqrt{2x-1} = 0$; 4) $\sqrt{3x+2} = 0$.

Решить уравнение (136—139).

136. 1) $\sqrt{x+1} = 2$; 2) $\sqrt{x-1} = 3$; 3) $\sqrt{1-2x} = 4$; 4) $\sqrt{2x-1} = 3$.

137. 1) $\sqrt{x+1} = \sqrt{2x-3}$; 2) $\sqrt{x-2} = \sqrt{3x-6}$;
3) $\sqrt{x^2+24} = \sqrt{11x}$; 4) $\sqrt{x^2+4x} = \sqrt{14-x}$.

138. 1) $\sqrt{x+2} = x$; 2) $\sqrt{3x+4} = x$;
3) $\sqrt{20-x^2} = 2x$; 4) $\sqrt{0{,}4-x^2} = 3x$.

139. 1) $\sqrt{x^2-x-8} = x-2$; 2) $\sqrt{x^2+x-6} = x-1$.

140. Решить неравенство:

1) $(x-1)^3 > 1$; 2) $(x+5)^3 > 8$; 3) $(2x-3)^7 \geqslant 1$;
4) $(3x-5)^7 < 1$; 5) $(3-x)^4 > 256$; 6) $(4-x)^4 > 81$.

141. Объяснить, почему не имеет корней уравнение:

1) $\sqrt{x} = -8$; 2) $\sqrt{x} + \sqrt{x-4} = -3$;
3) $\sqrt{-2-x^2} = 12$; 4) $\sqrt{7x-x^2-63} = 5$.

Решить уравнение (142—144).

142. 1) $\sqrt{x^2-4x+9} = 2x-5$; 2) $\sqrt{x^2+3x+6} = 3x+8$;
3) $2x = 1 + \sqrt{x^2+5}$; 4) $x + \sqrt{13-4x} = 4$.

143. 1) $\sqrt{x+12} = 2 + \sqrt{x}$; 2) $\sqrt{4+x} + \sqrt{x} = 4$.

144. 1) $\sqrt{2x+1} + \sqrt{3x+4} = 3$; 2) $\sqrt{4x-3} + \sqrt{5x+4} = 4$;
3) $\sqrt{x-7} - \sqrt{x+17} = -4$; 4) $\sqrt{x+4} - \sqrt{x-1} = 1$.

145. При каких значениях x принимают одинаковые значения функции:

1) $y=\sqrt{4+\sqrt{x}}$, $y=\sqrt{19-2\sqrt{x}}$; 2) $y=\sqrt{7+\sqrt{x}}$, $y=\sqrt{11-\sqrt{x}}$?

146. Решить неравенство:

1) $\sqrt{x-2}>3$; 2) $\sqrt{x-2}\leqslant 1$; 3) $\sqrt{2-x}\geqslant x$;

4) $\sqrt{2-x}<x$; 5) $\sqrt{5x+11}>x+3$; 6) $\sqrt{x+3}\leqslant x+1$.

147. Стрельба из спортивного пистолета по круглой мишени диаметром 1 м ведётся из точки прямой, перпендикулярной плоскости мишени и проходящей через её центр. На каком расстоянии от мишени должна быть точка выстрела, чтобы разность расстояний от неё до края мишени и до центра была не больше 2 см?

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ II

148. Найти область определения функции:

1) $y=\frac{1}{2x+1}$; 2) $y=(3-2x)^{-2}$; 3) $y=\sqrt{-5-3x}$; 4) $y=\sqrt[3]{7-3x}$.

149. (Устно.) Используя свойство возрастания функций $y=\sqrt[3]{x}$ и $y=x^3$, сравнить числа:

1) $\sqrt[3]{2{,}7}$ и $\sqrt[3]{2{,}9}$; 2) $\sqrt[3]{\frac{1}{7}}$ и $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$;

3) $(-2)^3$ и $(-3)^3$; 4) $\left(2\frac{2}{3}\right)^3$ и $\left(2\frac{3}{4}\right)^3$.

150. Выяснить свойства функции и построить эскиз её графика:

1) $y=-2x^4$; 2) $y=\frac{1}{2}x^3$; 3) $y=2\sqrt{x}$; 4) $y=3\sqrt[3]{x}$.

151. (Устно.) В каких квадрантах расположены ветви гиперболы $y=\frac{k}{x}$, если $k=-4$; $k=3$?

152. Построить в одной системе координат графики функций $y=x$ и $y=x^3$. Найти координаты точек их пересечения.

153. Найти координаты точек пересечения графиков функций:

1) $y=x^2$, $y=x^3$; 2) $y=\frac{1}{x}$, $y=2x$;

3) $y=\sqrt{x}$, $y=|x|$; 4) $y=\sqrt[3]{x}$, $y=\frac{1}{x}$.

154. Решить неравенство:

1) $x^4\leqslant 81$; 2) $x^5>32$; 3) $x^6>64$; 4) $x^5\leqslant -32$.

155. Решить уравнение:

1) $\sqrt{3-x}=2$; 2) $\sqrt{5x-1+3x^2}=3x$; 3) $\sqrt{3-11x}=2x$;

4) $\sqrt{3x+1}=7$; 5) $\sqrt{2x-1}=x-2$; 6) $\sqrt{2-2x}=x+3$.

156. Найти область определения функции:

1) $y=\sqrt[3]{x^2+2x-15}$; 2) $y=\sqrt{13x-22-x^2}$;

3) $y=\sqrt{\dfrac{x^2+6x+5}{x+7}}$; 4) $y=\sqrt{\dfrac{x^2-9}{x^2+8x+7}}$.

157. Выяснить, возрастает или убывает функция:

1) $y=\dfrac{1}{(x-3)^2}$ на промежутке $(3; +\infty)$;

2) $y=\dfrac{1}{(x-2)^3}$ на промежутке $(-\infty; 2)$.

158. Выяснить, является ли функция чётной или нечётной:
1) $y=x^6-3x^4+x^2-2$; 2) $y=x^5-x^3+x$.

159. Выяснить свойства функции и построить её график:

1) $y=\dfrac{1}{x^2}$; 2) $y=\dfrac{1}{x^3}$; 3) $y=3-\dfrac{1}{x^2}$; 4) $y=\dfrac{1}{(x-1)^2}-2$.

Решить неравенство (160—161).

160. 1) $(3x+1)^4>625$; 2) $(3x^2+5x)^5\leqslant 32$.

161. 1) $\sqrt{x^2-3x}<2$; 2) $\sqrt{2x+1}\leqslant x-1$.

162. Решить уравнение:

1) $\sqrt{2x^2+5x-3}=x+1$; 2) $\sqrt{3x^2-4x+2}=x+4$;

3) $\sqrt{x+3}+\sqrt{2x-3}=6$; 4) $\sqrt{7-x}+\sqrt{3x-5}=4$.

ПРАКТИЧЕСКИЕ И ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ

1. В воду погружают конус и тело, состоящее из двух цилиндров, так, как показано на рисунке 19.

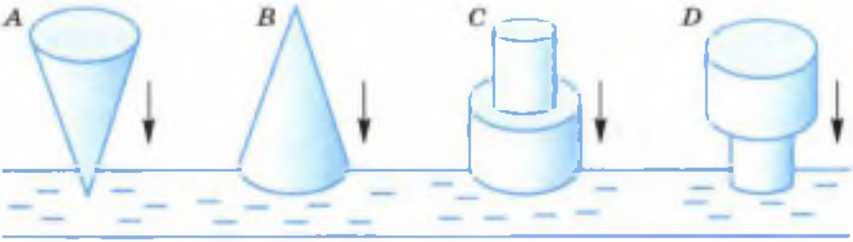


Рис. 19

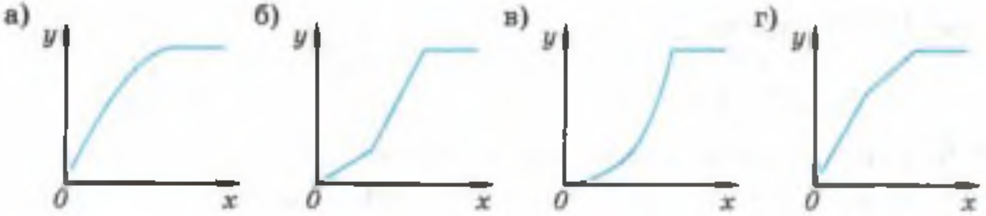


Рис. 20

На рисунках 20, *а* — *г* изображены графики зависимости величины y — массы вытесненной воды от величины x — глубины погружения тела. Установить, какому из способов погружения каждого из тел какой из графиков соответствует.

2. Сколько нужно взять молока (y кг) жирности $x\%$, чтобы получить из него 1 кг масла жирности 80%? Построить график зависимости y от x, если $0{,}5 \leqslant x \leqslant 3{,}2$.
3. Зубчатое колесо имеет 20 зубьев и совершает 2 оборота за минуту. Сколько оборотов y в минуту делает сцепленное с ним другое зубчатое колесо, имеющее n зубьев? Изобразить графически зависимость y от n, если n принимает значения 6, 8, 10, 12, 16, 20, 24.

4. Два шкива связаны ременной передачей. Первый шкив имеет диаметр 0,2 м и делает 4 оборота в секунду. Построить график зависимости числа оборотов в секунду второго шкива y от его диаметра d, если 0,05 м $\leqslant d \leqslant$ 0,4 м.
5. Среднее геометрическое (среднее пропорциональное) двух положительных чисел a и b равно $\sqrt{a \cdot b}$. Построить график зависимости среднего геометрического чисел 6 и x, если x может принимать любое значение из промежутка $\left[\frac{1}{6}; 6\right]$.

В этой главе вы узнали,

что такое:

— область определения функции;
— степенная функция;
— функция, возрастающая на промежутке; убывающая на промежутке;

— функция $y=\sqrt{x}$; $y=\sqrt[3]{x}$; $y=x^3$; $y=\frac{k}{x}$, её свойства и график;
— гипербола;
— чётная функция; нечётная функция;
— обратная пропорциональная зависимость;

как:

— находить область определения функции, заданной формулой;
— строить график чётной функции; нечётной функции;
— находить промежутки возрастания функции; убывания функции;
— применять свойства степенной функции при решении простейших неравенств.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

I уровень

1. Найти область определения функции:

а) $y=\frac{8}{x-1}$; б) $y=\sqrt{9-x^2}$.

2. Построить график функции:

а) $y=\sqrt{x}$; б) $y=\frac{6}{x}$; в) $y=-\frac{5}{x}$; г) $y=x^3$.

Для каждой функции по графику найти: а) $y(2)$; б) значение x, если $y(x)=3$; в) промежутки, на которых $y(x)>0$, $y(x)<0$; г) промежутки возрастания, убывания.

3. Установить, чётной или нечётной является функция:

а) $y=3x^6+x^2$; б) $y=8x^5-x$.

II уровень

4. Найти область определения функции:

а) $y=\sqrt[4]{3-x}$; б) $y=\sqrt{\frac{7-x}{4-x^2}}$.

5. Построить график функции $y=-\frac{4}{x-2}$. Найти:

а) область определения этой функции;
б) промежутки, на которых функция возрастает;
в) значения x, при которых функция принимает положительные значения; отрицательные значения;

II уровень

г) корни уравнения $-\frac{4}{x-2} = 2 - x$ с помощью графиков функций $y = -\frac{4}{x-2}$ и $y = 2 - x$.

6. Выяснить, является ли функция:

а) $y = -2x^3 + x|x| - 1$; б) $y = 3x^7 - x|x|$; в) $y = x^6 + x|x| + 2$

чётной; нечётной; ни чётной, ни нечётной.

III уровень

7. Найти область определения функции $y = \frac{5\sqrt{x}}{x - 3\sqrt{x}}$.

8. Решить уравнение:

а) $\sqrt{x-3} = 5$; б) $\sqrt{3 - x - x^2} = x$.

9. Решить неравенство:

а) $(x-7)^5 < 32$; б) $\sqrt[3]{1-x} < 2$.

10. Доказать, что функция $y = 2\sqrt{5x+1} - 2$ возрастает при $x \geqslant -0{,}2$.

11. Построить график функции:

а) $y = \frac{x+1}{2-x}$; б) $y = |x+1| + |x-3|$.

ТЕМЫ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ РАБОТ

1. Явления природы, протекающие по законам степенной функции.
2. Степенная функция в экономике.
3. Степенные функции в гуманитарных науках.
4. История появления функциональных понятий, связанных со степенной функцией.
5. Фрактальные степенные зависимости.
6. Композиция функций.
7. Семейства графиков степенных зависимостей. Задание формулой параболы безопасности.
8. Способы нахождения приближённых значений степенных функций, в частности с использованием компьютерных программ.
9. Применение компьютерных программ для построения графиков функций с помощью сдвигов.
10. Решение уравнений и неравенств с помощью компьютерных программ.

ГЛАВА III

Прогрессии

Эта глава посвящена изучению числовых последовательностей, в том числе двум особым последовательностям — арифметической и геометрической прогрессиям.

С разнообразными последовательностями чисел вы неоднократно встречались при изучении математики и в повседневной жизни. Вам хорошо знакомы, например, следующие последовательности:

1) натуральных чисел (1, 2, 3, 4, 5, ...);
2) чётных натуральных чисел (2, 4, 6, 8, 10, ...);
3) треугольных чисел (1, 3, 6, 10, 15, ...);
4) квадратных чисел (1, 4, 9, 16, 25, ...);
5) простых чисел (2, 3, 5, 7, 11, 13, ...);
6) чисел первых лет, открывающих новые столетия по календарю новой эры (1, 101, 201, 301, ...);
7) чисел инфузорий, происходящих от деления пополам одной особи (1, 2, 4, 8, 16, ...) и др.

Некоторые из этих последовательностей обладают следующим свойством: разность двух соседних чисел последовательности остаётся постоянной (из перечисленных это первая, вторая и шестая последовательности). Такие последовательности называют *арифметическими прогрессиями*. Существуют последовательности, у которых сохраняется отношение последующего числа к предыдущему (например, седьмая последовательность). Такие последовательности называют *геометрическими прогрессиями*.

Во всех этих последовательностях каждому натуральному числу n (начиная с $n=1$) ставится в соответствие по определённому правилу некоторое число. Например, в последовательности чётных натуральных чисел значению $n=1$ соответствует первое чётное натуральное число 2, значению $n=2$ соответствует второе чётное число 4, ..., значению n соответствует n-е по порядку чётное натуральное число, равное $2n$. Числовые последовательности в математике часто рассматривают как *функции натурального аргумента*. Так, например, арифметическую прогрессию рассматривают как линейную функцию натурального аргумента.

Само слово *прогрессия* (от лат. *progressio* — движение вперёд) впервые встретилось в работах итальянского учёного *Аниция Манлия Северина Боэция (ок. 480 – ок. 524)*. В те времена под прогрессией понимали любую числовую последовательность, построенную таким образом, чтобы имелась возможность продолжать её неограниченно. Последовательности, которые мы сегодня называем прогрессиями, рассматривали ещё учёные Древнего Египта, Вавилона, Греции.

В этой главе вы познакомитесь со свойствами арифметической и геометрической прогрессий, научитесь находить суммы их членов, узнаете историю изучения числовых последовательностей математиками разных стран и времён. Решая задачи этой главы, вы поймёте, что в реальной жизни немало явлений происходит по законам прогрессии.

§ 11 Числовая последовательность

> В повседневной практике часто используется нумерация различных предметов, чтобы указать порядок их расположения. Например, дома на каждой улице нумеруются. В библиотеке нумеруются читательские абонементы и затем располагаются в порядке присвоенных номеров в специальных карточках. Иными словами, читательские абонементы располагают в определённой последовательности.
>
> В этом параграфе будут рассмотрены примеры числовых последовательностей, возникающих из практической деятельности людей. Будут введены понятия, связанные с числовыми последовательностями и их членами. Будут показаны способы, с помощью которых можно задавать последовательность, а также способы изображения её членов на числовой оси и на координатной плоскости.

Нужно вспомнить:

- **нахождение значения выражения при заданных значениях входящих в него букв;**
- **понятие формулы;**
- **нахождение натурального числа, следующего за данным; предшествующего данному;**
- **возведение в натуральную степень положительных и отрицательных чисел;**
- **изображение чисел на числовой оси;**
- **изображение точек с заданными координатами на координатной плоскости;**
- **решение уравнений первой степени с одним неизвестным.**

В сберегательном банке по номеру лицевого счёта вкладчика можно легко найти этот счёт и посмотреть, какой вклад на нём лежит. Пусть на счёте № 1 лежит вклад a_1 рублей, на счёте № 2 лежит вклад a_2 рублей и т. д. Получается **числовая последовательность** $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_N$, где N — число всех счетов. Здесь каждому натуральному числу n от 1 до N поставлено в соответствие число a_n.

В математике изучаются в основном **бесконечные** числовые последовательности: a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...
Число a_1 называют **первым членом** последовательности, число a_2 — **вторым членом** последовательности, число a_3 — **третьим членом** последовательности и т. д. Число a_n называют **n-м (энным) членом** последовательности, а натуральное число n — его **номером.**

Например, в последовательности квадратов натуральных чисел 1, 4, 9, 16, 25, ..., n^2, $(n+1)^2$, ... $a_1 = 1$ — первый член последовательности; $a_n = n^2$ является n-м членом последовательности; $a_{n+1} = (n+1)^2$ является $(n+1)$-м (эн плюс первым) членом последовательности.

Часто последовательность можно задать формулой её n-го члена.

Например, формулой $a_n = \frac{1}{n}$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) задана последовательность $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$.

Задача 1. Числовая последовательность задана формулой $a_n = n(n-2)$. Вычислить сотый член этой последовательности.

▶ $a_{100} = 100(100-2) = 9800$. ◁

Задача 2. Числовая последовательность задана формулой $x_n = 2n + 3$. 1) Найти номер члена последовательности, равного 43. 2) Выяснить, является ли число 50 членом данной последовательности.

▶ 1) По условию $2n + 3 = 43$, откуда $n = 20$.

2) Допустим, что 50 — член последовательности с номером n, тогда $2n + 3 = 50$, откуда $n = 23{,}5$. Так как полученное значение n не является натуральным, то оно не может быть номером члена последовательности, т. е. число 50 не является членом последовательности. ◁

Члены последовательности можно наглядно изображать двумя способами: с помощью точек на числовой оси и с помощью точек на координатной плоскости.

В первом случае члены последовательности изображаются на оси Ox точками с координатами a_1, a_2, a_3, ... При этом около каждой точки указывается, какому члену последовательности она соответствует. Например, на рисунке 21 изображены первые 6 членов

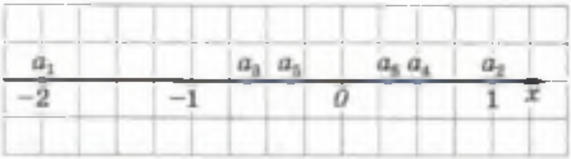


Рис. 21

последовательности, заданной формулой $a_n = (-1)^n \cdot \frac{2}{n}$.

Во втором случае каждый член последовательности изображается на координатной плоскости точкой, абсцисса которой равна номеру члена последовательности, а ордината — значению члена последовательности, т. е. точкой с координатами $(n; a_n)$. Например, на рисунке 22 изображены первые 4 члена последовательности, заданной формулой $a_n = \frac{1}{2} n^2$. Заметим, что все члены этой последовательности лежат на параболе $y = \frac{1}{2} x^2$.

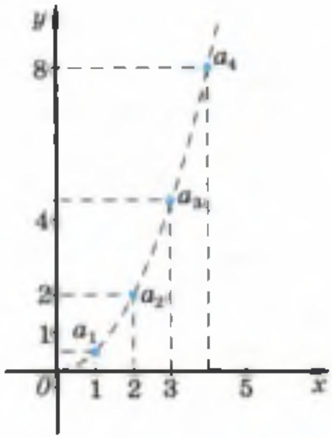


Рис. 22

Иногда последовательность задают формулой, позволяющей вычислить любой член последовательности, начиная с некоторого, если известны один или несколько предыдущих её членов. Такой способ задания последовательности называют **рекуррентным** (от латинского слова *recurro* — возвращаться).

Например, знакомая вам последовательность чисел Фибоначчи (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...) задаётся рекуррентным способом: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.

Устные вопросы и задания

1. Привести пример бесконечной числовой последовательности, заданной формулой её n-го члена. Назвать её первый; второй; пятый; n-й; $(n+1)$-й члены.
2. Какими способами можно задать числовую последовательность? Привести примеры последовательностей, заданных разными способами.
3. Как наглядно можно представить члены последовательности?
4. На графике какой линейной функции лежат все члены последовательности, заданной формулой $a_n = 2n - 3$?

Вводные упражнения

1. Расположить в порядке возрастания числа: $3\frac{3}{4}$; -7; $0{,}08$; 0; $-0{,}3$; $1{,}03$; $-3{,}78$; -1.
2. Для каждого из чисел 11; −17; 99; −100 называть: предшествующее ему целое число; следующее за ним целое число.

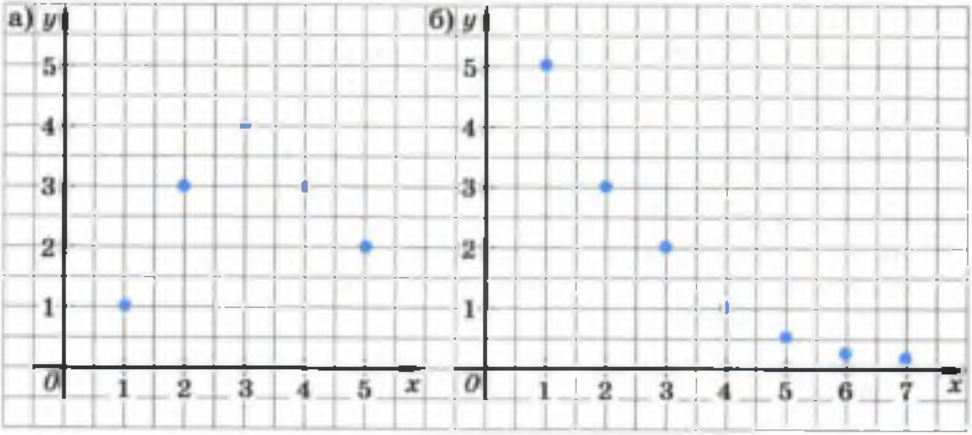


Рис. 23

3. Для натурального числа $n+2$ записать: предшествующее ему натуральное число; следующее за ним натуральное число.
4. При $n=1$; $n=4$ найти значение выражения:

   1) $7n-3$; 2) $\frac{4}{n^2}$; 3) $(-1)^n \cdot n$; 4) $(-1)^{n+1} n^2$.

5. На числовой оси отметить числа 3; $-3{,}5$; $2\frac{1}{4}$.
6. На координатной плоскости отметить точки $A\,(2;\,-3)$; $B\,(6;\,1)$.
7. Дана функция: 1) $y=2x-1$; 2) $y=x^3+1$. Найти $y\,(1)$; $y\,(4)$; $y\,(n+1)$; $y\,(n+2)$.
8. График функции $y=y\,(x)$ изображён на рисунке 23. Найти область определения этой функции.
9. Решить уравнение: 1) $27=5x+3$; 2) $13=22-3x$.

Упражнения

163. Дана последовательность квадратов натуральных чисел

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ \ldots,\ n^2,\ (n+1)^2,\ \ldots.$$

1) Назвать третий, шестой, n-й члены последовательности.
2) Указать номер члена последовательности, равного 4, 25, n^2, $(n+1)^2$.

164. Вычислить первые пять членов последовательности, которая задана формулой n-го члена:

1) $a_n=2n+3$; 2) $a_n=6-3n$; 3) $a_n=15-n^2$;

4) $a_n=\frac{21-n^2}{2}$; 5) $a_n=\frac{(-1)^n}{2n}$; 6) $a_n=(-1)^n\frac{n^3}{10}$.

Изобразить эти члены на числовой оси; на координатной плоскости.

165. (Устно.) Последовательность задана формулой $x_n = n^2$. Какой номер имеет член этой последовательности, равный 100; 144; 225? Является ли членом последовательности число: 48; 49; 169?

166. Последовательность задана формулой $a_n = n^2 - 2n - 6$. Является ли членом этой последовательности число:
1) -3; 2) 2; 3) 3; 4) 9?

167. Найти первые четыре члена последовательности, заданной условием $a_1 = 2$ и рекуррентной формулой:
1) $a_{n+1} = 3a_n + 1$; 2) $a_{n+1} = 5 - 2a_n$.

168. Числовая последовательность задана формулой n-го члена $a_n = (n-1)(n+4)$. Найти n, если: 1) $a_n = 150$; 2) $a_n = 104$.

169. Вычислить первые четыре члена последовательности, заданной рекуррентной формулой $a_{n+1} = \sqrt{a_n}$ и условием $a_1 = 256$.

170. Записать первые шесть членов последовательности, заданной условием $a_1 = 1$ и рекуррентной формулой:
1) $a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + 3}$; 2) $a_{n+1} = \sqrt{\dfrac{a_n^2}{3}}$.

$\boxed{171.}$ Числовая последовательность задана рекуррентной формулой $a_{n+2} = a_n^2 - a_{n+1}$ и условиями $a_1 = 2$, $a_2 = 3$. Вычислить пятый член последовательности.

$\boxed{172.}$ Последовательность задана формулой n-го члена. Записать $(n+1)$-й, $(n+2)$-й и $(n+5)$-й члены этой последовательности:
1) $a_n = -5n + 4$; 2) $a_n = 2(n - 10)$;
3) $a_n = 2 \cdot 3^{n+1}$; 4) $a_n = 7 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+2}$.

Диалог об истории

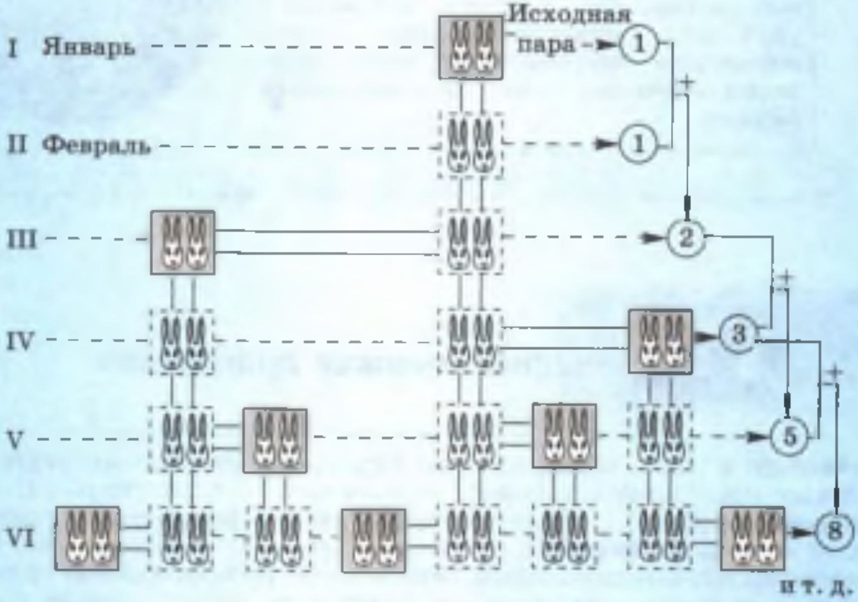
Леонардо Фибоначчи и его знаменитая последовательность

Профессор, расскажите нам, пожалуйста, поподробней о Фибоначчи и его последовательности.

Леонардо Фибоначчи (т. е. сын Боначчи), как часто его называли по прозвищу отца, родился в Пизе в начале XIII в. и очень рано научился считать на абаке. Будучи взрослым, он много путешествовал по торговым делам. Производя расчёты, совершенствовал свои умения в вычислениях. Помимо решения коммерческих задач, Фибоначчи изучал достижения математиков тех стран, в которых бывал (Египта, Греции, Сирии, Сицилии и др.). Он сам решил много интересных задач с помощью уравнений, извлечения квадратных и кубических корней и др.

Л. Фибоначчи опубликовал три большие научные работы, самая известная из которых «Книга об абаке». Благодаря этой работе Европа узнала индо-арабскую систему чисел, которая постепенно вытеснила римскую нумерацию. В этой же работе Фибоначчи привёл знаменитую последовательность чисел (впоследствии названную его именем), как результат решения задачи о размножении кроликов. Вот эта задача: «Через каждый месяц пара взрослых кроликов производит на свет другую пару. Способность к размножению у кроликов появляется через 2 месяца после рождения. Сколько пар кроликов родится в течение года, если одну новорождённую пару поместить в замкнутое пространство?»

В итоге получается последовательность чисел 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, где через запятую приведено количество пар кроликов в каждом из 12 месяцев года (см. рис.).



Профессор, в 8 классе, когда говорили о «Золотом сечении», мы убедились в том, что наилучшими приближениями коэффициента золотого сечения (числа $\frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1{,}618$) являются отношения последующего к предыдущему чисел из последовательности Фибоначчи. Например: $\frac{8}{5} = 1{,}6$; $\frac{13}{8} = 1{,}625$; $\frac{21}{13} = 1{,}615$ и т. д. А ещё где-нибудь используются числа Фибоначчи?

В данном случае, пожалуй, не очень подходит слово «используются»... Удивительные факты *проявления* чисел Фибоначчи можно наблюдать в биологии, астрономии, экономике и т. д. Например, росток травы-чихун (тысячелистника птармика), когда появляется из земли, уже имеет один листок. Затем он вытягивается и даёт ещё один лист, затем через какое-то время вырастают сразу 2 новых листа, затем 3 листа, затем 5, потом 8, а после этого он выбрасывает 13 соцветий и т. д. Красивейшие спирали в конфигурациях плодов и растений, в формах космических галактик имеют в основе своего построения те же числа Фибоначчи. Закономерность, связанную с числами Фибоначчи, подметил американский финансист *Ральф Нельсон Элиот (1871—1948)* в деятельности финансовых рынков. Сегодня созданной им теорией волн (названной именем Элиота) пользуются, например, при прогнозировании «бычьего» рынка на финансовых биржах.

§ 12 Арифметическая прогрессия

Начиная с этого параграфа, вы будете изучать особые виды числовых последовательностей, называемые прогрессиями. В этом параграфе будет введено определение арифметической прогрессии и найдена формула её общего члена. С помощью этой формулы вы научитесь находить любой член арифметической прогрессии и выяснять, является ли конкретное число членом данной прогрессии.

Нужно вспомнить:

- понятие числовой последовательности;
- способы задания числовой последовательности;
- изображение членов последовательности точками на координатной плоскости;
- решение линейных уравнений и систем линейных уравнений с двумя неизвестными;
- определение трапеции и свойство средней линии трапеции.

Продолжительность года приблизительно равна 365 суткам. Более точное значение равно $365\frac{1}{4}$ суток, поэтому каждые четыре года накапливается погрешность, равная одним суткам. Для учёта этой погрешности к каждому четвёртому году добавляются сутки, и удлинённый год называют високосным.

Например, в третьем тысячелетии високосными годами являются годы 2004, 2008, 2012, 2016, ... В этой последовательности каждый её член, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом 4. Такие последовательности называют **арифметическими прогрессиями.**

! **Определение.** Числовая последовательность a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ... называется **арифметической прогрессией**, если для всех натуральных n выполняется равенство $a_{n+1}=a_n+d$, где d — некоторое число.

Из этой формулы следует, что $a_{n+1}-a_n=d$. Число d называют **разностью арифметической прогрессии**.

Примеры

1) Натуральный ряд чисел 1, 2, 3, 4, ..., n, ... является арифметической прогрессией. Разность этой прогрессии $d=1$.
2) Последовательность целых отрицательных чисел -1, -2, -3, ..., $-n$, ... — арифметическая прогрессия с разностью $d=-1$.
3) Последовательность 3, 3, 3, ..., 3, ... — арифметическая прогрессия с разностью $d=0$.

Задача 1. Доказать, что последовательность, заданная формулой $a_n=1{,}5+3n$, является арифметической прогрессией.

▶ Требуется доказать, что разность $a_{n+1}-a_n$ одна и та же для всех n (не зависит от n). Запишем $(n+1)$-й член данной последовательности:

$$a_{n+1}=1{,}5+3(n+1).$$

Поэтому

$$a_{n+1}-a_n=1{,}5+3(n+1)-(1{,}5+3n)=3.$$

Следовательно, разность $a_{n+1}-a_n$ не зависит от n. ◁

По определению арифметической прогрессии

$$a_{n+1}=a_n+d,\quad a_{n-1}=a_n-d,$$

откуда

$$a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2},\text{ где } n>1.$$

Таким образом, каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, равен среднему арифметическому двух соседних с ним членов.

Отметим, что если a_1 и d заданы, то остальные члены арифметической прогрессии можно вычислить по рекуррентной формуле $a_{n+1} = a_n + d$. Таким способом нетрудно вычислить несколько первых членов прогрессии, однако, например, для a_{100} уже потребуется много вычислений. Обычно для этого используется формула n-го члена. По определению арифметической прогрессии

$$a_2 = a_1 + d,$$
$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d,$$
$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$$

и т. д.

Вообще

$$a_n = a_1 + (n-1)\,d, \qquad (1)$$

так как n-й член арифметической прогрессии получается из первого члена прибавлением $(n-1)$ раз числа d.

Формулу (1) называют **формулой n-го члена арифметической прогрессии.**

Задача 2. Найти сотый член арифметической прогрессии, если $a_1 = -6$ и $d = 4$.

▶ По формуле (1) имеем $a_{100} = -6 + (100-1) \cdot 4 = 390$. ◁

Задача 3. Число 99 является членом арифметической прогрессии 3, 5, 7, 9, ... Найти номер этого члена.

▶ Пусть n — искомый номер. Так как $a_1 = 3$ и $d = 2$, то по формуле $a_n = a_1 + (n-1)\,d$ имеем $99 = 3 + (n-1) \cdot 2$. Поэтому $99 = 3 + 2n - 2$; $98 = 2n$, $n = 49$. ◁

Задача 4. В арифметической прогрессии $a_8 = 130$ и $a_{12} = 166$. Найти формулу n-го члена.

▶ Используя формулу (1), находим:

$$a_8 = a_1 + 7d, \quad a_{12} = a_1 + 11d.$$

Подставив в эти выражения данные значения a_8 и a_{12}, получим систему уравнений относительно a_1 и d:

$$\begin{cases} a_1 + 7d = 130, \\ a_1 + 11d = 166. \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения первое, получаем

$$4d = 36, \quad d = 9.$$

Следовательно,

$a_1 = 130 - 7d = 130 - 63 = 67.$

Найдём формулу n-го члена прогрессии:

$a_n = 67 + 9(n-1) = 58 + 9n.$ ◁

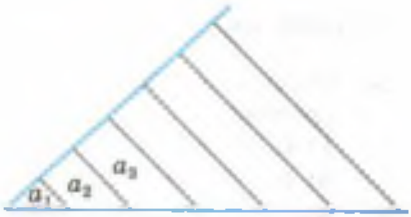


Рис. 24

Задача 5. На стороне угла откладываются от его вершины равные отрезки. Через их концы проводятся параллельные прямые. Доказать, что длины $a_1, a_2, a_3, \ldots$ отрезков этих прямых, заключённых между сторонами угла (рис. 24), образуют арифметическую прогрессию.

▶ В образовавшейся трапеции с основаниями a_{n-1} и a_{n+1} средняя линия равна a_n $(n > 1)$. Поэтому $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$.

Отсюда $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$, или $a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1}$. Так как разность между каждым членом последовательности и предшествующим ему членом одна и та же, то эта последовательность — арифметическая прогрессия. ◁

Устные вопросы и задания

1. Что называется арифметической прогрессией?
2. Что такое разность арифметической прогрессии?
3. Привести пример арифметической прогрессии, заданной: 1) перечислением её первых трёх членов; 2) формулой n-го члена; 3) первым членом и разностью. Найти пятый член этой прогрессии.
4. Сформулировать свойство каждого члена арифметической прогрессии, начиная со второго.
5. Прочитать формулу n-го члена арифметической прогрессии.

Вводные упражнения

1. Найти значение выражения $0{,}5x - 7$ при $x = 1$; $x = 2$; $x = 5$; $x = 10$.
2. Последовательность задана формулой n-го члена: $a_n = -6n + 11$. Записать формулы $(n+1)$-го и $(n+2)$-го членов этой последовательности. Найти первые три члена этой последовательности.
3. Дана последовательность $-\frac{3}{4}$; $-\frac{1}{4}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{5}{4}$; .... Найти разность между её третьим и вторым членами; четвёртым и третьим членами; пятым и четвёртым членами. Заметив закономерность в построении этой последовательности, найти её шестой член.

Упражнения

173. (Устно.) Назвать первый член и разность арифметической прогрессии:
1) 6, 8, 10, ...; 2) 7, 9, 11, ...;
3) 25, 21, 17, ...; 4) −12, −9, −6, ...

174. Записать первые пять членов арифметической прогрессии, если:
1) $a_1 = 2$, $d = 5$; 2) $a_1 = -3$, $d = 2$.

175. Доказать, что последовательность, заданная формулой n-го члена, является арифметической прогрессией:
1) $a_n = 3 - 4n$; 2) $a_n = -5 + 2n$;
3) $a_n = 3(n + 1)$; 4) $a_n = 2(3 - n)$.

176. В арифметической прогрессии найти:
1) a_{15}, если $a_1 = 2$, $d = 3$;
2) a_{20}, если $a_1 = 3$, $d = 4$;
3) a_{18}, если $a_1 = -3$, $d = -2$;
4) a_{11}, если $a_1 = -2$, $d = -4$.

177. Записать формулу n-го члена арифметической прогрессии:
1) 1, 6, 11, 16, ...; 2) 25, 21, 17, 13, ...;
3) −4, −6, −8, −10, ...; 4) 1, −4, −9, −14, ...

178. Число −22 является членом арифметической прогрессии 44, 38, 32, ... Найти номер этого члена.

179. Является ли число 12 членом арифметической прогрессии −18, −15, −12, ...?

180. Число −59 является членом арифметической прогрессии 1, −5, ... Найти его номер. Является ли число −46 членом этой прогрессии?

181. Найти разность арифметической прогрессии, если:
1) $a_1 = 7$, $a_{16} = 67$; 2) $a_1 = -4$, $a_9 = 0$.

182. Разность арифметической прогрессии равна 1,5. Найти a_1, если:
1) $a_9 = 12$; 2) $a_7 = -4$.

183. Найти первый член арифметической прогрессии, если:
1) $d = -3$, $a_{11} = 20$; 2) $a_{21} = -10$, $a_{22} = -5{,}5$.

184. Найти формулу n-го члена арифметической прогрессии, если:
1) $a_3 = 13$, $a_6 = 22$; 2) $a_2 = -7$, $a_7 = 18$.

185. При каких n члены арифметической прогрессии 15, 13, 11, ... отрицательны?

186. В арифметической прогрессии $a_1 = -10$, $d = 0{,}5$. При каких n выполняется неравенство $a_n < 2$?

187. Найти девятый член и разность арифметической прогрессии, если:

1) $a_8 = 126$, $a_{10} = 146$;
2) $a_8 = -64$, $a_{10} = -50$;
3) $a_8 = -7$, $a_{10} = 3$;
4) $a_8 = 0{,}5$, $a_{10} = -2{,}5$.

188. Свободно падающее тело проходит в первую секунду 4,9 м, а в каждую следующую секунду на 9,8 м больше, чем в предыдущую. Какое расстояние будет пройдено падающим телом за пятую секунду?

189. Курс воздушных ванн начинают с 15 мин в первый день и увеличивают время этой процедуры в каждый следующий день на 10 мин. Сколько дней следует принимать воздушные ванны в указанном режиме, чтобы достичь их максимальной продолжительности 1 ч 45 мин?

190. Доказать, что для арифметической прогрессии справедливо равенство $a_n + a_k = a_{n-l} + a_{k+l}$ при $n > l$.
Найти $a_{10} + a_5$, если $a_7 + a_8 = 30$.

191. 1) Доказать, что если для всех членов некоторой последовательности, начиная со второго, справедливо равенство $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, то эта последовательность является арифметической прогрессией.
2) Доказать, что для арифметической прогрессии справедливо равенство $a_n = \frac{a_{n+k} + a_{n-k}}{2}$, $n > k$. Найти a_{20}, если $a_{10} + a_{30} = 120$.

Диалог об истории

Арифметическая прогрессия в трудах древних учёных

Профессор, наверняка ещё древним учёным были известны отдельные арифметические прогрессии. Расскажите, какие задачи на эти прогрессии они умели решать.

Действительно, в клинописных табличках вавилонских учёных и в египетских папирусах встречаются задачи на арифметическую прогрессию. Вот одна из задач, найденная на вавилонских табличках: «У 10 братьев 100 шекелей серебра. Брат над братом поднимается, а на сколько поднимается — неизвестно. Доля восьмого 6 шекелей. На сколько выше брат над братом?»

В условии задачи фактически дана сумма десяти первых членов арифметической прогрессии и её восьмой член. Но неизвестна даже разность прогрессии. И эту задачу могли решить в Древнем Вавилоне?

Могли. Но тогда учёные не знали формул, а каждый раз решали задачи арифметическими методами. Вавилонский учёный рассуждал следующим образом.

Найдём среднюю для всех долю: 100 : 10 = 10 (шекелей). Удвоенная средняя доля (т. е. 20 шекелей) — это сумма долей третьего и восьмого братьев (имея в виду, что первого от третьего, как и восьмого от десятого отделяют 2 ступени, две разности). Если у восьмого брата 6 шекелей, то у третьего $20 - 6 = 14$ (шекелей). Разность между их долями составляет $14 - 6 = 8$ (шекелей). Третьего брата от восьмого отделяют 5 ступеней, значит, одна ступень равна $\frac{8}{5}$ шекеля.

Замечу только, что в задаче речь шла об арифметической прогрессии, члены которой уменьшаются, т. е. у этой прогрессии $d = -\frac{8}{5}$.

§ 13 Сумма первых n членов арифметической прогрессии

Известно, что великий немецкий математик Иоганн Карл Фридрих Гаусс (1777—1855) ещё в детстве отличался математическими способностями. Когда его учитель в начальной школе попросил найти сумму первых 100 натуральных чисел, юный Гаусс почти сразу дал ответ: 5050. Гаусс заметил, что суммы пар чисел, одинаково удалённых от начала и конца всей суммы $1 + 2 + 3 + \ldots$ $\ldots + 98 + 99 + 100$, одинаковы и равны 101. Таких пар 50, значит, вся сумма равна $101 \cdot 50 = 5050$. Фактически, Гаусс ещё в детстве смог найти сумму первых 100 членов арифметической прогрессии, у которой $a_1 = 1$ и $d = 1$.

В этом параграфе вам предстоит вывести формулу суммы первых n членов любой арифметической прогрессии, а также научиться применять эту формулу на практике.

Нужно вспомнить:

- определение арифметической прогрессии;
- формулу n-го члена арифметической прогрессии;
- свойство любого члена арифметической прогрессии, начиная со второго;
- способы задания последовательности;
- решение линейных и квадратных уравнений.

Задача 1. Найти сумму всех натуральных чисел от 1 до 100.

▶ Запишем эту сумму двумя способами:

$$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 99 + 100, \quad S = 100 + 99 + 98 + \ldots + 2 + 1.$$

Сложим почленно эти равенства:

$$2S = \underbrace{101 + 101 + 101 + \ldots + 101 + 101}_{100\ \text{слагаемых}}.$$

Следовательно, $2S = 101 \cdot 100$, откуда

$$S = 101 \cdot 50 = 5050. \ \triangleleft$$

Рассмотрим теперь произвольную арифметическую прогрессию

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots .$$

Пусть S_n — сумма первых n членов этой прогрессии:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n.$$

ТЕОРЕМА **Сумма первых n членов арифметической прогрессии равна**

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n. \quad (1)$$

● Запишем S_n двумя способами:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n,$$
$$S_n = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1.$$

По определению арифметической прогрессии эти равенства можно записать так:

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + (a_1 + (n-1)\,d), \quad (2)$$
$$S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \ldots + (a_n - (n-1)\,d). \quad (3)$$

Сложим почленно равенства (2) и (3):

$$2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots + (a_1 + a_n)}_{n\ \text{слагаемых}}.$$

Следовательно, $2S_n = (a_1 + a_n)\,n$, откуда $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$. ○

Задача 2. Найти сумму первых шестидесяти чётных натуральных чисел.

▶ Последовательность чётных натуральных чисел

$$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \ldots,\ 2n,\ \ldots$$

является арифметической прогрессией с разностью $d = 2$. Так как $a_n = 2n$, то $a_1 = 2$, $a_{60} = 120$. По формуле (1) находим:

$$S_{60} = \frac{2 + 120}{2} \cdot 60 = 3660. \ \triangleleft$$

Задача 3. Найти сумму $38 + 35 + 32 + \ldots + (-7)$, если известно, что её слагаемые являются последовательными членами арифметической прогрессии.

▶ По условию $a_1 = 38$, $d = -3$, $a_n = -7$.
Применяя формулу $a_n = a_1 + (n-1)d$, получаем $-7 = 38 + (n-1)(-3)$, откуда $n = 16$.

По формуле $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$ находим: $S_{16} = \frac{38-7}{2} \cdot 16 = 248$. ◁

Задача 4. Сколько нужно взять последовательных натуральных чисел, начиная с 1, чтобы их сумма была равна 153?

▶ Натуральный ряд чисел — арифметическая прогрессия с разностью $d = 1$. По условию $a_1 = 1$, $S_n = 153$. Формулу суммы первых n членов преобразуем так:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{a_1 + a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.$$

Используя данные, получаем уравнение с неизвестным n:

$$153 = \frac{2 \cdot 1 + (n-1) \cdot 1}{2} n,$$

откуда

$$306 = 2n + (n-1)n, \quad n^2 + n - 306 = 0.$$

Решая это уравнение, найдём:

$$n_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 1224}}{2} = \frac{-1 \pm 35}{2}, \quad n_1 = -18, \quad n_2 = 17.$$

Число слагаемых не может быть отрицательным, поэтому $n = 17$. ◁

Устные вопросы и задания

1. Сформулировать теорему о сумме первых n членов арифметической прогрессии.
2. Перечислить этапы доказательства теоремы о сумме первых n членов арифметической прогрессии.
3. Прочитать формулу суммы первых n членов арифметической прогрессии, полученную в ходе решения задачи 4.

Вводные упражнения

1. Найти рациональным способом сумму:
   1) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9$;
   2) $3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17$.
2. Найти n-й член арифметической прогрессии $-7; -4; -1; \ldots$.
3. Найти первые пять членов арифметической прогрессии, у которой $a_1 = \frac{1}{2}$, $d = -\frac{1}{2}$.

4. Найти номер члена арифметической прогрессии, заданного формулой общего члена $a_n = \frac{2}{3}n + 5$, если $a_n = 11$.

5. Доказать, что в арифметической прогрессии $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1}$.

Упражнения

192. Найти сумму первых n членов арифметической прогрессии, если:
1) $a_1 = 1$, $a_n = 20$, $n = 50$; 2) $a_1 = 1$, $a_n = 200$, $n = 100$;
3) $a_1 = -1$, $a_n = -40$, $n = 20$; 4) $a_1 = 2$, $a_n = 100$, $n = 50$.

193. Найти сумму всех натуральных чисел от 2 до 98 включительно.

194. Найти сумму всех нечётных чисел от 1 до 133 включительно.

195. Найти сумму двенадцати первых членов арифметической прогрессии, если:
1) $a_1 = -5$, $d = 0{,}5$; 2) $a_1 = \frac{1}{2}$, $d = -3$.

196. Найти сумму первых n членов арифметической прогрессии:
1) 9; 13; 17; ..., если $n = 11$;
2) -16; -10; -4; ..., если $n = 12$.

197. Найти сумму, если её слагаемые — последовательные члены арифметической прогрессии:
1) $3 + 6 + 9 + \ldots + 273$; 2) $90 + 80 + 70 + \ldots + (-60)$.

198. Найти сумму всех двузначных чисел; сумму всех трёхзначных чисел.

199. Арифметическая прогрессия задана формулой n-го члена. Найти S_{50}, если:
1) $a_n = 3n + 5$; 2) $a_n = 7 + 2n$.

200. Последовательность задана рекуррентной формулой $a_{n+1} = a_n - 3$ и условием $a_1 = 7$. Найти сумму девяти первых членов этой последовательности.

201. Сколько нужно взять последовательных натуральных чисел, начиная с 3, чтобы их сумма была равна 75?

202. Найти a_n и d арифметической прогрессии, у которой:
1) $a_1 = 10$, $n = 14$, $S_{14} = 1050$; 2) $a_1 = 2\frac{1}{3}$, $n = 10$, $S_{10} = 90\frac{5}{6}$.

203. Найти a_1 и d арифметической прогрессии, если:
1) $a_7 = 21$, $S_7 = 205$; 2) $a_{11} = 92$, $S_{11} = 22$.

204. При хранении брёвен строевого леса их укладывают так, как показано на рисунке 25. Сколько брёвен находится в одной кладке, если в её основании положено 12 брёвен?

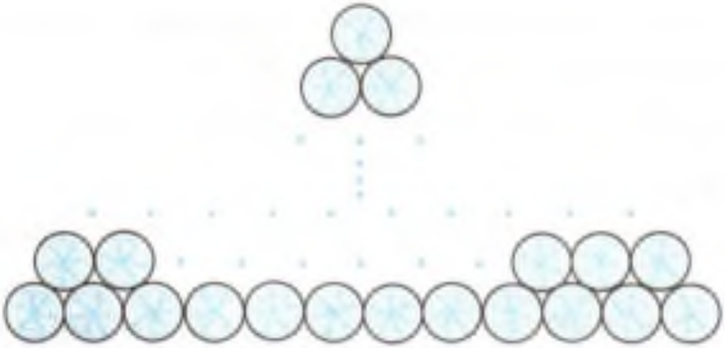


Рис. 25

205. В арифметической прогрессии $a_3 + a_9 = 8$. Найти S_{11}.

206. Найти первый член и разность арифметической прогрессии, если $S_5 = 65$ и $S_{10} = 230$.

207. Доказать, что для арифметической прогрессии выполняется равенство $S_{12} = 3\,(S_8 - S_4)$.

Диалог об истории

Суммы арифметических прогрессий в древних манускриптах

Профессор, Вы говорили, что древние математики не знали общих формул для нахождения членов прогрессии, а значит, не было и формул для нахождения сумм её членов?

Отдельные случаи суммирования членов прогрессии встречаются в математических памятниках II тысячелетия до н. э. Однако тогда общих формул для нахождения сумм прогрессий не было. Тем не менее известно, что эмпирическим путём в Древнем Египте было выведено (для решения прикладных задач распределения продуктов, деления наследства и т. п.) правило нахождения любого члена арифметической прогрессии, если известны сумма S первых n её членов и разность прогрессии d. В современных обозначениях правило нахождения первого члена такой прогрессии можно записать в виде формулы $a_1 = \frac{S}{n} - (n-1)\cdot\frac{d}{2}$.

В V в. до н. э. греки уже знали такие прогрессии, как последовательность натуральных чисел, последовательности чётных и нечётных чисел, а также умели находить их суммы:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n\,(n+1)}{2},$$

$$2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n\,(n+1), \quad 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2.$$

Известно, что Архимед исследовал разные последовательности и для нужд механики вывел формулу суммы квадратов натуральных чисел: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}\,n\,(n+1)\,(2n+1)$.

С помощью какого же приёма он вывел эту формулу? Я помню, как долго в прошлом году мы находили сумму $\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \ldots + \frac{1}{99 \cdot 100}$. И нашли её только после того, как Вы подсказали, что каждое слагаемое суммы можно представить в виде разности: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

Способ, которым Архимед вывел формулу суммы квадратов натуральных чисел, я не буду вам рассказывать в надежде, что интересующиеся математикой школьники найдут его самостоятельно в книгах по истории математики. Вместо этого расскажу о методе, которым можно доказать, что предложенная формула нахождения суммы членов последовательности действительно верна.

Шаг вперёд

Метод математической индукции

Познакомимся с этим методом при доказательстве формулы Архимеда. Пусть дана последовательность $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, n^2, \ldots$.

Докажем, что сумма S_n первых n членов находится по формуле

$$S_n = \frac{1}{6} n (n+1)(2n+1). \qquad (*)$$

1) Проверим справедливость этой формулы при $n = 1$: $S_1 = \frac{1}{6} 1 (1+1)(2 \cdot 1 + 1) = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 1$. Для $n = 1$ формула (*) верна.

2) Предположим, что формула (*) верна для некоторого $n = k$, т. е. что верно равенство $S_k = \frac{1}{6} k (k+1)(2k+1)$.

Докажем, что в этом случае формула (*) верна и для $n = k + 1$, т. е. что верно равенство $S_{k+1} = \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$. Имеем

$$S_{k+1} = \underbrace{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2}_{S_k} + (k+1)^2.$$

По предположению $S_k = \frac{1}{6} k (k+1)(2k+1)$, поэтому

$$S_{k+1} = \frac{1}{6} k (k+1)(2k+1) + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} =$$

$$= \frac{(k+1)(2k^2+k+6k+6)}{6} = \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6},$$

т. е. $S_{k+1} = \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$.

Таким образом, если формула (*) верна для $n = k$, то она верна и для $n = k+1$.

Итак, при $n = 1$ формула (*) верна, значит, по доказанному она верна и для следующего натурального $n = 2$. Так как формула (*) верна при $n = 2$, то по доказанному она справедлива и при $n = 3$ и т. д. Следовательно, формула (*) справедлива при любом натуральном n. ○

Какой замечательный метод доказательства.

Он называется *методом математической индукции* (слово «индукция» происходит от латинского слова *inductio* — наведение). Этот метод состоит в следующем.

Для того чтобы доказать справедливость некоторого утверждения (формулы) для любого натурального числа n, необходимо:
1) проверить справедливость утверждения при $n = 1$;
2) из предположения о справедливости утверждения для $n = k$ доказать справедливость этого утверждения для $n = k+1$.

Хотелось бы попробовать самостоятельно доказать какие-нибудь формулы или утверждения с помощью метода математической индукции.

Пожалуйста. Попробуйте убедиться в справедливости следующих формул:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4};$$

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1} \cdot \frac{n(n+1)}{2}.$$

§ 14 Геометрическая прогрессия

В этом параграфе вы познакомитесь со вторым видом прогрессии — геометрической прогрессией. Научитесь находить n-й член этой прогрессии, познакомитесь со свойством, присущим членам геометрической прогрессии с положительными членами. Поймёте, что неоднократно встречались в жизни с явлениями, протекающими по законам геометрической прогрессии.

Нужно вспомнить:

- понятие числовой последовательности;
- способы задания последовательности;
- определение степени с натуральным показателем;
- свойства степени с натуральным показателем;
- понятие квадратного корня;
- понятие процента;
- формулу нахождения процентов от числа;
- решение уравнений вида $x^2 = a$ при $a > 0$;
- условие равенства $a^x = a^y$, где $a > 0$, $a \neq 1$.

Рассмотрим равносторонний треугольник со стороной 4 см. Построим треугольник, вершинами которого являются середины сторон данного треугольника (рис. 26). По свойству средней линии треугольника сторона второго треугольника равна 2 см. Продолжая аналогичные построения, получим треугольники со сторонами 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ см и т. д. Запишем последовательность длин сторон этих треугольников: 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, ...

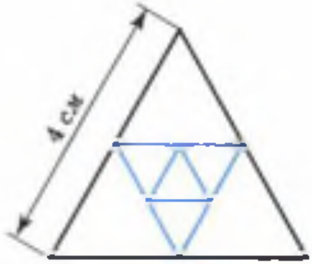


Рис. 26

В этой последовательности каждый её член, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же число $\frac{1}{2}$.

! Определение. Числовая последовательность

$$b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$$

называется **геометрической прогрессией**, если для всех натуральных n выполняется равенство

$$b_{n+1} = b_n q,$$

где $b_n \neq 0$, q — некоторое число, не равное нулю.

Из этой формулы следует, что $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q$. Число q называется **знаменателем** геометрической прогрессии.

Примеры

1) 2, 8, 32, 128, ... — геометрическая прогрессия со знаменателем $q = 4$;

2) $1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \ldots$ — геометрическая прогрессия со знаменателем $q=\frac{2}{3}$;

3) $-\frac{1}{12}$, 1, -12, 144, ... — геометрическая прогрессия со знаменателем $q=-12$;

4) 7, 7, 7, ... — геометрическая прогрессия со знаменателем $q=1$.

Задача 1. Доказать, что последовательность, заданная формулой $b_n=7^{2n}$, является геометрической прогрессией.

▶ Отметим, что $b_n=7^{2n}\neq 0$ при всех n. Требуется доказать, что частное $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ — одно и то же число для всех n (не зависит от n).

Получаем $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{7^{2(n+1)}}{7^{2n}}=49$, т. е. частное $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ не зависит от n. ◁

По определению геометрической прогрессии

$$b_{n+1}=b_nq, \quad b_{n-1}=\frac{b_n}{q},$$

откуда

$$b_n^2=b_{n-1}b_{n+1}, \quad n>1.$$

! **Если все члены геометрической прогрессии положительны, то $b_n=\sqrt{b_{n-1}b_{n+1}}$, т. е. каждый член прогрессии, начиная со второго, равен среднему геометрическому двух соседних с ним членов.**

Отметим, что если b_1 и q заданы, то остальные члены геометрической прогрессии можно вычислить по рекуррентной формуле $b_{n+1}=b_nq$. Однако для больших n это трудоёмко. Обычно пользуются формулой n-го члена.

По определению геометрической прогрессии

$$b_2=b_1q,$$
$$b_3=b_2q=b_1q^2,$$
$$b_4=b_3q=b_1q^3 \text{ и т. д.}$$

Вообще

$$b_n=b_1q^{n-1}, \qquad (1)$$

так как n-й член геометрической прогрессии получается из первого члена умножением $(n-1)$ раз на число q.

Формулу (1) называют **формулой n-го члена геометрической прогрессии**.

Задача 2. Найти седьмой член геометрической прогрессии, если $b_1 = 81$ и $q = \frac{1}{3}$.

▶ По формуле (1) имеем $b_7 = 81 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{7-1} = \frac{81}{3^6} = \frac{1}{9}$. ◁

Задача 3. Число 486 является членом геометрической прогрессии 2, 6, 18, ... Найти номер этого члена.

▶ Пусть n — искомый номер. Так как $b_1 = 2$, $q = 3$, то по формуле $b_n = b_1 q^{n-1}$ имеем $486 = 2 \cdot 3^{n-1}$, $243 = 3^{n-1}$, $3^5 = 3^{n-1}$, откуда $n - 1 = 5$, $n = 6$. ◁

Задача 4*. В геометрической прогрессии $b_6 = 96$ и $b_8 = 384$. Найти формулу n-го члена.

▶ По формуле $b_n = b_1 q^{n-1}$ имеем $b_6 = b_1 q^5$, $b_8 = b_1 q^7$. Подставив данные в условии значения b_6 и b_8, получим $96 = b_1 q^5$, $384 = b_1 q^7$. Разделив второе из этих равенств на первое, получим

$$\frac{384}{96} = \frac{b_1 q^7}{b_1 q^5},$$

откуда $4 = q^2$, или $q^2 = 4$. Из последнего равенства находим $q = 2$ или $q = -2$.

Чтобы найти первый член прогрессии, воспользуемся равенством $96 = b_1 q^5$.

1) При $q = 2$ находим:

$$96 = b_1 \cdot 2^5,\ \ 96 = b_1 \cdot 32,\ \ b_1 = 3.$$

Если $b_1 = 3$ и $q = 2$, то формула n-го члена имеет вид $b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$.

2) При $q = -2$ находим:

$$96 = b_1 (-2)^5,\ \ 96 = b_1 (-32),\ \ b_1 = -3.$$

Если $b_1 = -3$ и $q = -2$, то формула n-го члена имеет вид

$$b_n = -3 \cdot (-2)^{n-1}.$$

Ответ. $b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ или $b_n = -3 \cdot (-2)^{n-1}$. ◁

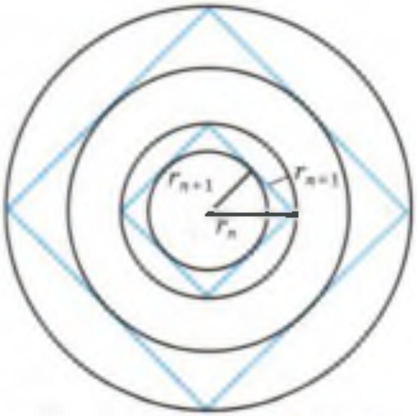


Рис. 27

Задача 5*. В окружность вписан квадрат, а в него вписана вторая окружность. Во вторую окружность вписан второй квадрат, а в него — третья окружность и т. д. (рис. 27). Доказать, что радиусы окружностей образуют геометрическую прогрессию.

▶ Пусть r_n — радиус n-й окружности.

Тогда по теореме Пифагора $r_{n+1}^2+r_{n+1}^2=r_n^2$, откуда $r_{n+1}^2=\frac{1}{2}r_n^2$; так как $r_n>0$, то $r_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}r_n$.

Значит, последовательность радиусов окружностей образует геометрическую прогрессию со знаменателем $\frac{1}{\sqrt{2}}$. ◁

Задача 6. Вкладчик поместил в банк a рублей под ежегодные $p\%$. Какую сумму он будет иметь на счету через 3 года, если он не будет снимать начисления?

▶ Через год на вкладе будет $a+a\cdot\frac{p}{100}=a\left(1+\frac{p}{100}\right)$ рублей. Через 2 года сумма вклада увеличится ещё на $p\%$, но уже от суммы, которая оказалась на счету через год, и станет (в рублях) равной

$$a\left(1+\frac{p}{100}\right)+\left(a\left(1+\frac{p}{100}\right)\right)\cdot\frac{p}{100}=a\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)=a\left(1+\frac{p}{100}\right)^2.$$

Найдём сумму (в рублях), которая будет на счету через 3 года:

$$a\left(1+\frac{p}{100}\right)^2+\left(a\left(1+\frac{p}{100}\right)^2\right)\cdot\frac{p}{100}=$$

$$=a\left(1+\frac{p}{100}\right)^2\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)=a\left(1+\frac{p}{100}\right)^3. \triangleleft$$

Формулу общего члена геометрической прогрессии, записанную в виде $b=b_1\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$ называют **формулой сложных процентов.**

Задача 7. Банк начисляет по вкладам 4% годовых. Сколько денег будет на счету у вкладчика через 5 лет, если он положил на счёт 100 000 р. и не снимал начисления?

▶ Искомую сумму денег b найдём по формуле сложных процентов при $b_1=100\,000$, $p=4$, $n=5$:

$$b=100\,000\,(1+0{,}04)^5=100\,000\cdot1{,}04^5=121\,665{,}29,$$

т. е. 121 665 р. 29 к. ◁

Сложные проценты являются примером так называемого *экспоненциального роста* величин (роста в геометрической прогрессии).

Устные вопросы и задания

1. Что называется геометрической прогрессией?
2. Что называется знаменателем геометрической прогрессии?
3. Привести пример геометрической прогрессии, заданной: 1) перечислением её первых трёх членов; 2) формулой n-го члена; 3) первым членом и знаменателем. Найти её четвёртый член.
4. Сформулировать свойство каждого члена геометрической прогрессии, начиная со второго, если все члены прогрессии — положительные числа.
5. Какая формула называется формулой сложных процентов?
6. Что такое экспоненциальный рост?

Вводные упражнения

1. Найти частное:

   1) $\frac{1}{12}:\frac{1}{6}$; 2) $\frac{2}{15}:\frac{4}{5}$; 3) $8:\frac{4}{5}$; 4) $0{,}1:100$.

2. Вычислить:

   1) $\left(1\frac{2}{3}\right)^2$; 2) $\left(-\frac{1}{2}\right)^4$; 3) $(6\cdot 2)^2$; 4) $3^9:3^5$; 5) $\left(\frac{1}{3}\right)^3:\left(\frac{1}{3}\right)^5$.

3. Найти n, если:
   1) $3^n=27$; 2) $5^{n+1}=125$; 3) $6^{n-1}=216$; 4) $2^{n-2}=32$.

4. Последовательность задана формулой n-го члена: $x_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n$. Найти первые четыре члена этой последовательности.

Упражнения

208. (Устно.) Назвать первый член и знаменатель геометрической прогрессии:
1) 4, 2, 1, ...; 2) −10, 20, −40, ...; 3) −50, 10, −2, ...

209. Записать первые пять членов геометрической прогрессии, если:
1) $b_1=12$, $q=2$; 2) $b_1=-3$, $q=-4$.

210. Доказать, что последовательность, заданная формулой n-го члена, является геометрической прогрессией:

1) $b_n=3\cdot 2^n$; 2) $b_n=5^{n+3}$; 3) $b_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$; 4) $b_n=\frac{1}{5^{n-1}}$.

211. Для геометрической прогрессии вычислить:

1) b_4, если $b_1=3$ и $q=10$; 2) b_7, если $b_1=4$ и $q=\frac{1}{2}$;

3) b_5, если $b_1=1$ и $q=-2$; 4) b_6, если $b_1=-3$ и $q=-\frac{1}{3}$.

212. Записать формулу n-го члена геометрической прогрессии:

1) $4,\ 12,\ 36,\ \ldots;$ 2) $3,\ 1,\ \frac{1}{3},\ \ldots;$

3) $4,\ -1,\ \frac{1}{4},\ \ldots;$ 4) $3,\ -4,\ \frac{16}{3},\ \ldots.$

213. Найти номер подчёркнутого члена геометрической прогрессии:

1) $6,\ 12,\ 24,\ 48,\ \ldots,\ \underline{192},\ \ldots;$

2) $4,\ 12,\ 36,\ 108,\ \ldots,\ \underline{324},\ \ldots;$

3) $625,\ 125,\ 25,\ 5,\ \ldots,\ \underline{\frac{1}{25}},\ \ldots;$

4) $-1,\ 2,\ -4,\ 8,\ \ldots,\ \underline{128},\ \ldots.$

214. Найти знаменатель геометрической прогрессии, если:

1) $b_1=2,\ b_5=162;$ 2) $b_1=-128,\ b_7=-2;$

3) $b_1=3,\ b_4=81;$ 4) $b_1=250,\ b_4=-2.$

215. Дана геометрическая прогрессия $2,\ 6,\ 18,\ \ldots.$

1) Вычислить восьмой член этой прогрессии.

2) Найти номер члена последовательности, равного 162.

216. Найти седьмой член и знаменатель геометрической прогрессии с положительными членами, если:

1) $b_8=\frac{1}{9},\ b_6=81;$ 2) $b_6=9,\ b_8=3.$

217. Найти пятый и первый члены геометрической прогрессии, если:

1) $b_4=5,\ b_6=20;$ 2) $b_4=9,\ b_6=4.$

218. Вкладчик 3 января 2012 г. внёс в сберегательный банк 300 000 р. Какой была сумма его вклада на 3 января 2014 г., если сбербанк начислял ежегодно 6% от суммы вклада?

219. Дан квадрат со стороной 4 см. Середины его сторон являются вершинами второго квадрата. Середины сторон второго квадрата являются вершинами третьего квадрата и т. д. Доказать, что последовательность площадей этих квадратов является геометрической прогрессией. Найти площадь седьмого квадрата.

220. Каждое простейшее одноклеточное животное инфузория-туфелька размножается делением на 2 части. Сколько инфузорий было первоначально, если после шестикратного деления их стало 320?

221. Доказать, что если $x \neq 0$, то числа $\sqrt{3x},\ x\sqrt{3},\ x\sqrt{3x}$ являются тремя последовательными членами геометрической прогрессии.

Диалог об истории

Происхождение названия геометрической прогрессии

Профессор, появление названия арифметической прогрессии очевидно: каждый её член, начиная со второго, является средним арифметическим соседних с ним членов. А как появилось название геометрической прогрессии?

Ты ошибаешься (кстати, как и многие учащиеся) в объяснении происхождения названия арифметической прогрессии. Сейчас поймёшь почему. У древних греков теория геометрических прогрессий была связана с так называемой *геометрической пропорцией*: $a : b = b : c$, в которой положительные числа a, b и c действительно образуют геометрическую прогрессию со знаменателем, равным $\sqrt{\frac{c}{a}}$. У греков существовало также понятие *арифметической пропорции*: $a - b = b - c$, в которой числа a, b и c образуют арифметическую прогрессию с разностью, равной $\frac{c-a}{2}$. Прогрессии у греков рассматривались как логическое продолжение пропорций, поэтому названия *геометрическая* и *арифметическая* были перенесены с пропорций на соответствующие прогрессии. Так что, скорее всего, в истории математики полусумму двух чисел стали называть *средним арифметическим*, зная, что в арифметической пропорции $a - b = b - c$ число $b = \frac{a+c}{2}$. А корень квадратный из произведения двух положительных чисел стали называть *средним геометрическим* (а иногда *средним пропорциональным*), зная, что в геометрической пропорции $a : b = b : c$ число $b = \sqrt{ac}$.

Обозначения прогрессий

Профессор, недавно на даче я нашла учебник алгебры, по которому училась моя бабушка. Там я увидела обозначение арифметической прогрессии значком ÷ и геометрической прогрессии значком ∺. Кто придумал эти обозначения?

В прошлом нашем диалоге об истории названий прогрессий я вам рассказал, что в Древней Греции прогрессии считались порождением соответствующих пропорций. Геометрическую пропорцию $a : b = b : c$ греки иногда обозначали знаком ∺. Этот знак можно встретить в работах английского учёного *Исаака Барроу (1630—1677)* при обозначении геометрической прогрессии. В XVIII в. этот знак перекочевал в школьные учебники Англии и Франции, а позже — и России. По аналогии со знаком ∺ арифметическую прогрессию стали обозначать ÷.

Экспоненциальный рост величин

Профессор, я вспомнил легенду, которую Вы нам рассказывали ещё в 7 классе. Мудрец, который изобрёл шахматы, попросил у падишаха за своё изобретение зёрна пшеницы в следующих количествах: за первую клетку шахматной доски — 1 зерно, за вторую — 2 зерна, за третью — 2^2, за четвёртую — 2^3, ..., за последнюю 64-ю клетку — 2^{63} зёрен. И падишах велел слугам выдать требуемую пшеницу. Мы тогда поняли, что на самом деле изобретатель попросил невероятно большое количество зёрен.

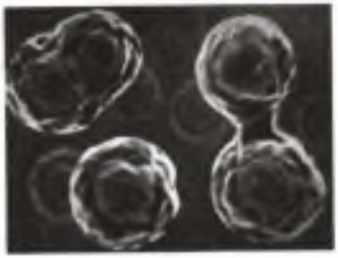
Действительно, только за последнюю клетку мудрец попросил 2^{63} зёрен, что образует 20-разрядное число зёрен. Это количество больше, чем объём зерна, выращиваемый на всей Земле за год. Таким интересным образом падишах познакомился с экспоненциальным ростом величин. Фактически в этой легенде речь шла о геометрической прогрессии, у которой $b_1 = 1$ и $q = 2$.

Профессор, приведите, пожалуйста, ещё интересные примеры экспоненциального роста величин.

С примерами такого роста люди сталкиваются в реальной жизни довольно часто, хотя редко задумываются над этим. Например, если в стране каждый год инфляция составляет 12%, то (вы и сами можете с помощью микрокалькулятора легко подсчитать) деньги населения обесцениваются в два раза примерно за 6 лет. Если население планеты возрастает всего на 2,5% в год (что сейчас и происходит), то количество людей на Земле удвоится примерно через 28 лет (т. е. за одно поколение!).

Профессор, в каких из школьных предметов рассматриваются явления, протекающие по законам прогрессий.

Я думаю, что вы и сами их знаете. Но не помешает некоторые из них напомнить.



1) **В биологии.** Многие микроорганизмы размножаются делением пополам, поэтому при благоприятных условиях через равные промежутки времени их число удваивается.

2) **В физике.** Нейтрон при ударе в ядро урана раскалывает его на две части. Получаются 2 нейтрона. Затем 2 нейтрона, ударяя по двум ядрам урана, раскалывают их на четыре части и т. д.

3) **В химии.** При повышении температуры по закону арифметической прогрессии скорость химических реакций растёт в геометрической прогрессии.

4) **В геометрии.** Стороны вписанных друг в друга правильных треугольников образуют геометрическую прогрессию.

§ 15 Сумма первых n членов геометрической прогрессии

В этом параграфе будет выведена формула для нахождения суммы первых n членов геометрической прогрессии, если известны её первый член, знаменатель и число слагаемых. Будет показано, как можно преобразовать эту формулу, чтобы легко найти сумму членов геометрической прогрессии по известным первому и последнему члену, а также знаменателю прогрессии.

Нужно вспомнить:

- определение геометрической прогрессии и формулу её n-го члена;
- свойства степени с натуральным показателем;
- действия с дробями;
- действия с многочленами;
- условие равенства $a^x = a^y$, где $a > 0$, $a \neq 1$.

Задача 1. Найти сумму $S = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5$.

▶ Умножим обе части равенства на 3: $3S = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6$. Перепишем равенства так:

$$S = 1 + (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5), \quad 3S = (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5) + 3^6.$$

Выражения, стоящие в скобках, одинаковы. Поэтому, вычитая из второго равенства первое, получаем

$$3S - S = 3^6 - 1, \ 2S = 3^6 - 1, \ S = \frac{3^6 - 1}{2} = \frac{729 - 1}{2} = 364. \ ◁$$

Рассмотрим теперь произвольную геометрическую прогрессию b_1, $b_1 q$, ..., $b_1 q^n$, ..., знаменатель которой $q \neq 1$. Пусть S_n — сумма n первых членов этой прогрессии:

$$S_n = b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \ldots + b_1 q^{n-1}. \qquad (1)$$

ТЕОРЕМА Сумма первых n членов геометрической прогрессии со знаменателем $q \neq 1$ равна

$$S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}. \qquad (2)$$

● Умножим обе части равенства (1) на q:

$$qS_n = b_1 q + b_1 q^2 + b_1 q^3 + \ldots + b_1 q^n. \qquad (3)$$

Перепишем равенства (1) и (3), выделив в них одинаковые слагаемые

$$S_n = b_1 + (b_1q + b_1q^2 + \ldots + b_1q^{n-1}),$$
$$qS_n = (b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + \ldots + b_1q^{n-1}) + b_1q^n.$$

Выражения, стоящие в скобках, равны. Поэтому, вычитая из верхнего равенства нижнее, получаем

$$S_n - qS_n = b_1 - b_1q^n.$$

Отсюда

$$S_n(1-q) = b_1(1-q^n), \quad S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}. \ \bigcirc$$

Заметим, что если $q = 1$, то $S_n = \underbrace{b_1 + b_1 + \ldots + b_1}_{n \text{ слагаемых}} = b_1n$, т. е. $S_n = b_1n$.

Задача 2. Найти сумму первых пяти членов геометрической прогрессии 6, 2, $\frac{2}{3}$, ...

▶ В этой прогрессии $b_1 = 6$, $q = \frac{1}{3}$. По формуле (2) находим:

$$S_5 = \frac{6\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^5\right)}{1-\frac{1}{3}} = \frac{6\left(1-\frac{1}{243}\right)}{\frac{2}{3}} = \frac{6 \cdot 242 \cdot 3}{2 \cdot 243} = \frac{242}{27}. \ \triangleleft$$

Задача 3. В геометрической прогрессии со знаменателем $q = \frac{1}{2}$ сумма первых шести членов равна 252. Найти первый член этой прогрессии.

▶ Воспользуемся формулой (2):

$$252 = \frac{b_1\left(1-\frac{1}{2^6}\right)}{1-\frac{1}{2}}.$$

Отсюда $252 = 2b_1\left(1-\frac{1}{64}\right)$, $252 = \frac{b_1 \cdot 63}{32}$, $b_1 = 128$. ◁

Задача 4. Сумма первых n членов геометрической прогрессии равна -93. Первый член этой прогрессии равен -3, а знаменатель q равен 2. Найти n.

▶ Используя формулу (2), получаем $-93 = \frac{-3(1-2^n)}{1-2}$. Отсюда $-31 = 1 - 2^n$, $2^n = 32$, $2^n = 2^5$, $n = 5$. ◁

Задача 5. Последовательность 5, 15, 45, ..., 1215, ... является геометрической прогрессией. Найти сумму $5 + 15 + 45 + ... + 1215$.

► В этой прогрессии $b_1 = 5$, $q = 3$, $b_n = 1215$. Формулу суммы первых n членов преобразуем так:

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{b_1 - b_1q^{n-1}q}{1-q} = \frac{b_1 - b_nq}{1-q} = \frac{b_nq - b_1}{q-1}.$$

Используя условия задачи, находим:

$$S_n = \frac{1215 \cdot 3 - 5}{3-1} = \frac{3645 - 5}{2} = 1820. \triangleleft$$

Устные вопросы и задания

1. Обосновать алгоритм решения задачи 1.
2. Сформулировать теорему о сумме первых n членов геометрической прогрессии.
3. Почему задачу 5 нельзя было решить по формуле (2)?

Вводные упражнения

1. Записать формулу n-го члена геометрической прогрессии
$\frac{1}{3}$; $\left(-\frac{1}{9}\right)$; $\frac{1}{27}$; $-\frac{1}{81}$; ... .
2. Найти разность выражений
$2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7$ и $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6$.
3. Вычислить:

1) $1-\left(\frac{1}{3}\right)^5$; 2) $1-\left(\frac{2}{7}\right)^2$; 3) $\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^6\right):\left(1-\frac{1}{2}\right)$; 4) $\dfrac{\frac{1}{3}\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^4\right)}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}$.

4. Решить уравнение:
1) $3^n = 243$; 2) $5^{n-1} = 625$.

Упражнения

222. Найти сумму первых n членов геометрической прогрессии, если:

1) $b_1 = \frac{1}{2}$, $q = 2$, $n = 6$; 2) $b_1 = -2$, $q = \frac{1}{2}$, $n = 5$;

3) $b_1 = 1$, $q = -\frac{1}{3}$, $n = 4$; 4) $b_1 = -5$, $q = -\frac{2}{3}$, $n = 5$;

5) $b_1 = 6$, $q = 1$, $n = 200$; 6) $b_1 = -4$, $q = 1$, $n = 100$.

223. Найти сумму первых семи членов геометрической прогрессии:
1) 5, 10, 20, ...; 2) 2, 6, 18, ...

224. В геометрической прогрессии найти:
1) b_1 и b_7, если $q=2$, $S_7=635$;
2) b_1 и b_8, если $q=-2$, $S_8=85$.

225. В геометрической прогрессии найти число n членов, если:
1) $S_n=189$, $b_1=3$, $q=2$;
2) $S_n=635$, $b_1=5$, $q=2$;
3) $S_n=170$, $b_1=256$, $q=-0{,}5$;
4) $S_n=-99$, $b_1=-9$, $q=-2$.

226. В геометрической прогрессии найти:
1) n и b_n, если $b_1=7$, $q=3$, $S_n=847$;
2) n и b_n, если $b_1=8$, $q=2$, $S_n=4088$;
3) n и q, если $b_1=2$, $b_n=1458$, $S_n=2186$;
4) n и q, если $b_1=1$, $b_n=2401$, $S_n=2801$.

227. Найти сумму чисел, если её слагаемые являются последовательными членами геометрической прогрессии:
1) $1+2+4+\ldots+128$; 2) $1+3+9+\ldots+243$;
3) $-1+2-4+\ldots+128$; 4) $5-15+45-\ldots+405$.

228. В геометрической прогрессии найти b_5 и S_4, если:
1) $b_2=15$, $b_3=25$;
2) $b_2=14$, $b_4=686$, $q>0$.

229. Геометрическая прогрессия задана формулой n-го члена:
1) $b_n=3\cdot 2^{n-1}$, найти S_5;
2) $b_n=-2\left(\frac{1}{2}\right)^n$, найти S_6.

230. Доказать тождество

$$(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+1)=x^n-1,$$

где n — натуральное число, большее 1.

231. В геометрической прогрессии найти:
1) b_1 и q, если $b_3=135$, $S_3=195$;
2) q и b_3, если $b_1=12$, $S_3=372$.

232. В геометрической прогрессии найти:
1) q, если $b_1=1$ и $b_3+b_5=90$;
2) q, если $b_2=3$ и $b_4+b_6=60$;
3) S_{10}, если $b_1-b_3=15$ и $b_2-b_4=30$;
4) S_5, если $b_3-b_1=24$ и $b_5-b_1=624$.

Шаг вперёд

Доказательства методом математической индукции

Профессор, хотелось бы вместе с Вами рассмотреть какую-нибудь необычную задачу на применение метода математической индукции.

Предлагаю доказать, что неравенство $2^n > n$ верно для любого натурального n.

● 1) Если $n = 1$, то $2^1 > 1$ — верное неравенство.

2) Предположим, что неравенство $2^n > n$ верно для некоторого $n = k$, т. е. верно неравенство $2^k > k$. Докажем, что оно будет верным и для $n = k + 1$, т. е. будет верным неравенство $2^{k+1} > k + 1$.

Доказательство. Так как $2^k > k$, то $2^k \cdot 2 > k \cdot 2$, т. е. $2^{k+1} > 2k$. Но $2k = k + k \geqslant k + 1$, так как $k \geqslant 1$. Следовательно, $2^{k+1} > k + 1$. Таким образом, неравенство $2^n > n$ доказано. ○

Ещё одну интересную задачу предлагаю решить самостоятельно.

Обозначим $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n, \ldots$ числа последовательности Фибоначчи ($c_1 = c_2 = 1$, $c_{n+2} = c_{n+1} + c_n$). Проверьте справедливость равенства $c_{n+1}^2 - c_{n+1} \cdot c_n = (-1)^n$ для $n = 1$; $n = 4$; $n = 7$. Пользуясь методом математической индукции, докажите справедливость этого равенства для любого натурального n.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ III

233. Вычислить три первых члена последовательности, заданной формулой n-го члена:

1) $a_n = n(n+3)$; 2) $a_n = 4^n$; 3) $a_n = 5 \cdot 2^n$; 4) $a_n = \sqrt{n^2 + 1}$.

234. Вычислить десятый и тридцатый члены последовательности, заданной формулой n-го члена:

1) $a_n = \dfrac{n-1}{n+1}$; 2) $a_n = \dfrac{n+9}{2n-1}$;

3) $a_n = |n - 15| - 5$; 4) $a_n = 10 - |n - 20|$.

235. Числовая последовательность задана рекуррентной формулой $a_{n+1} = 1 - 0{,}5a_n$ и условием $a_1 = 2$. Вычислить седьмой член этой последовательности.

236. Найти разность арифметической прогрессии и записать её четвёртый и пятый члены:

1) $4,\ 4\frac{1}{3},\ 4\frac{2}{3},\ \ldots$; 2) $3\frac{1}{2},\ 3,\ 2\frac{1}{2},\ \ldots$;

3) $1,\ 1+\sqrt{3},\ 1+2\sqrt{3},\ \ldots$; 4) $\sqrt{2},\ \sqrt{2}-3,\ \sqrt{2}-6\ \ldots$.

237. Доказать, что последовательность, заданная формулой n-го члена $a_n = -2(1-n)$, является арифметической прогрессией.

238. В арифметической прогрессии вычислить:

1) a_5, если $a_1 = 6$, $d = \frac{1}{2}$;

2) a_7, если $a_1 = -3\frac{1}{3}$, $d = -\frac{1}{3}$.

239. Найти сумму первых двадцати членов арифметической прогрессии, если:

1) $a_1 = -1$, $a_2 = 1$; 2) $a_1 = 3$, $a_2 = -3$.

240. Найти сумму первых n членов арифметической прогрессии, если:

1) $a_1 = -2$, $a_n = -60$, $n = 10$; 2) $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_n = 25\frac{1}{2}$, $n = 11$;

3) $a_1 = -\frac{1}{2}$, $a_n = 13\frac{1}{2}$, $n = 8$; 4) $a_1 = 48$, $a_n = 3$, $n = 11$.

241. Найти сумму, если её слагаемые — последовательные члены арифметической прогрессии:

1) $-38 + (-33) + (-28) + \ldots + 12$; 2) $-17 + (-14) + (-11) + \ldots + 13$.

242. Найти знаменатель геометрической прогрессии и записать четвёртый и пятый её члены:

1) $3,\ 1,\ \frac{1}{3},\ \ldots$; 2) $\frac{1}{4},\ -\frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \ldots$;

3) $3,\ \sqrt{3},\ 1,\ \ldots$; 4) $5,\ -5\sqrt{2},\ 10,\ \ldots$.

243. Записать формулу n-го члена геометрической прогрессии:

1) $-2,\ 4,\ -8,\ \ldots$; 2) $-\frac{1}{2},\ 1,\ -2,\ \ldots$.

244. В геометрической прогрессии найти b_n, если:

1) $b_1 = 2$, $q = 2$, $n = 6$; 2) $b_1 = \frac{1}{8}$, $q = 5$, $n = 4$;

3) $b_1 = 5$, $q = -2$, $n = 5$; 4) $b_1 = -\frac{1}{6}$, $q = -3$, $n = 6$.

245. Найти сумму первых n членов геометрической прогрессии, если:

1) $b_1 = \frac{1}{2}$, $q = -4$, $n = 5$; 2) $b_1 = 2$, $q = -\frac{1}{2}$, $n = 10$;

3) $b_1 = 10$, $q = 1$, $n = 6$; 4) $b_1 = 5$, $q = -1$, $n = 9$.

246. Найти сумму первых n членов геометрической прогрессии:

1) $128,\ 64,\ 32,\ \ldots,\ n = 6$; 2) $162,\ 54,\ 18,\ \ldots,\ n = 5$;

3) $\frac{2}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{8},\ \ldots,\ n = 5$; 4) $\frac{3}{4},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots,\ n = 4$;

5) $-\frac{1}{8},\ -\frac{1}{2},\ -2,\ \ldots,\ n = 4$; 6) $-4,\ 8,\ -16,\ \ldots,\ n = 5$.

247. Числовая последовательность задана рекуррентной формулой $a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$ и условиями $a_1 = -1$, $a_2 = 3$. Вычислить пятый член последовательности.

248. Найти разность арифметической прогрессии, если $a_1 = 2\frac{1}{2}$ и $a_8 = 23\frac{1}{2}$.

249. Записать первые пять членов арифметической прогрессии, если:
1) $a_1 = 5$, $a_3 = 15$; 2) $a_3 = 8$, $a_5 = 2$.

250. Между числами -10 и 5 вставить число так, чтобы получились три последовательных члена арифметической прогрессии.

251. Найти девятнадцатый и первый члены арифметической прогрессии, если:
1) $a_{13} = 28$, $a_{20} = 38$; 2) $a_{18} = -6$, $a_{20} = 6$.

252. При каком значении x являются последовательными членами арифметической прогрессии числа:
1) $3x$, $\frac{x+2}{2}$, $2x-1$; 2) $3x^2$, 2, $11x$?

253. Сколько нужно взять последовательных нечётных натуральных чисел, начиная с 5, чтобы их сумма была равна 252?

254. Найти a_n и d арифметической прогрессии, у которой:
1) $a_1 = 40$, $n = 20$, $S_{20} = -40$; 2) $a_1 = \frac{1}{3}$, $n = 16$, $S_{16} = -10\frac{2}{3}$.

255. Для геометрической прогрессии вычислить:
1) b_9, если $b_1 = 4$ и $q = -1$; 2) b_7, если $b_1 = 1$ и $q = \sqrt{3}$.

256. Найти пятый член геометрической прогрессии, если:
1) $b_2 = \frac{1}{2}$, $b_7 = 16$; 2) $b_2 = -3$, $b_6 = -81$;
3) $b_2 = 4$, $b_4 = 1$; 4) $b_4 = -\frac{1}{5}$, $b_6 = -\frac{1}{125}$.

257. Между числами 4 и 9 вставить положительное число так, чтобы получилось три последовательных члена геометрической прогрессии.

258. Отдыхающий, следуя совету врача, загорал в первый день 5 мин, а в каждый последующий день увеличивал время пребывания на солнце на 5 мин. В какой день недели время его пребывания на солнце будет равно 40 мин, если он начал загорать в среду?

259. Настенные русские часы с кукушкой устроены так, что кукушка кукует 1 раз, когда часы показывают половину очередного часа, и каждый час столько раз, каково время от 1 до 12. Сколько раз прокукует кукушка за сутки?

260. Найти первый член и разность арифметической прогрессии, если $a_1 + a_2 + a_3 = 15$ и $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 80$.

261. Найти первый член и разность арифметической прогрессии, если $a_1 + a_2 + a_3 = 0$ и $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 50$.

262. Доказать, что для геометрической прогрессии справедливо равенство $b_n^2 = b_{n+k} b_{n-k}$, где $n > k$. Вычислить b_7, если $b_3 b_{11} = 225$.

263. Доказать, что для геометрической прогрессии справедливо равенство $b_n b_k = b_{n+l} b_{k-l}$, где $k > l$. Вычислить $b_1 b_7$, если $b_3 b_5 = 72$.

264. Рост дрожжевых клеток происходит делением каждой клетки на две части. Сколько стало клеток после десятикратного их деления, если первоначально было a клеток?

265. Из пункта A в пункт B одновременно с постоянными скоростями отправились пешеход и велосипедист. Велосипедист, прибыв в пункт B, повернул назад и встретил пешехода через 1 ч после начала движения из пункта A. После встречи с пешеходом велосипедист снова поехал в пункт B, а по прибытии туда повернул обратно и встретился с пешеходом через $\frac{2}{3}$ ч после первой встречи. После второй встречи велосипедист опять поехал в пункт B, а доехав, повернул обратно и т. д. Найти время, за которое пешеход пройдёт путь AB.

266. Музыкальная октава делится на 12 равных интервалов-полутонов. Частота каждого последующего звука приблизительно в 1,059 раза больше частоты предыдущего. Во сколько раз нота *соль* выше ноты *до* той же октавы (вычисления провести на микрокалькуляторе)?

ПРАКТИЧЕСКИЕ И ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ

1. При рытье колодца договорились платить за каждый последующий метр глубины на 500 р. больше, чем за предыдущий. Вследствие этого последний метр обошёлся в 2 раза дороже,

чем первый. Средняя стоимость рытья одного метра составила 3750 р. Определить глубину колодца и стоимость работы.

2. Для полива 8 саженцев, расположенных по прямой линии на расстоянии 3 м друг от друга, приходится носить воду из колодца, распложенного на той же прямой на расстоянии 5 м от первого саженца (и на расстоянии 8 м от второго саженца). Сколько метров пути нужно преодолеть, чтобы полить все саженцы и возвратиться к колодцу, если воду носить одним ведром, а под каждый саженец выливать 2 ведра воды?

3. В крупных садоводческих хозяйствах ящики для яблок рекомендуется хранить в штабелях такой конструкции: в четырёх нижних рядах укладывают 35 ящиков по длине штабеля и 23 ящика по его ширине; при укладке каждого следующего ряда отступают от краёв предыдущего на половину длины и ширины одного ящика; всего в штабеле 22 ряда. Сколько ящиков в таком штабеле?

Указание. Подсчёт ящиков в рядах с 5-го по 22-й производить следующим образом:

$$(23-1)(35-1)+(23-2)(35-2)+\ldots+(23-18)(35-18)=$$
$$=23\cdot35\cdot18+(1^2+2^2+\ldots+18^2)-58(1+2+\ldots+18),$$

используя далее формулы суммы членов арифметической прогрессии и ранее доказанную формулу

$$1^2+2^2+3^2+\ldots n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

4. Шпиндель (вращающийся вал с устройством для закрепления заготовок) металлорежущих станков может вращаться

с различной скоростью, причём все возможные частоты вращения шпинделя образуют геометрическую прогрессию. У токарно-винторезного станка 1К62 в наличии 23 частоты вращения шпинделя. Среди них наименьшая $n_1 = 12{,}5$, а наибольшая $n_{23} = 2000$ оборотов в минуту. Найти n_{12}.

5. Популяция кабанов в заповеднике каждый год увеличивается на 10%. По прошествии скольких лет число кабанов удвоится?

6. Определить длины сторон треугольника, которые выражаются целыми числами и являются последовательными членами арифметической прогрессии, если периметр треугольника равен: 1) 9; 2) 12; 3) 15; 4) 18.

7. Можно ли вписать окружность в четырёхугольник, отличный от квадрата, если длины его сторон являются последовательными членами арифметической прогрессии?

8. Числовые значения величин внутренних углов (выраженных в градусах) некоторого многоугольника являются последовательными членами арифметической прогрессии с разностью $d = 20°$. Наибольший угол в этом многоугольнике равен $170°$. Сколько сторон имеет этот многоугольник?

9. (Задача из учебника «Арифметика» Л. Ф. Магницкого.) Некто продал лошадь за 156 рублей. Но покупатель, обретя лошадь, раздумал и возвратил её, говоря продавцу: «Нет мне расчёта покупать за эту цену лошадь, которая этих денег не стоит». Тогда продавец предложил другие условия: «Если, по-твоему, цена лошади высока, то купи её подковные гвозди, лошадь же тогда получишь бесплатно. Гвоздей в каждой подкове 6. За первый гвоздь дай мне $\frac{1}{4}$ копейки, за второй — $\frac{1}{2}$ копейки, за третий — 1 копейку и т. д.». Покупатель, соблазнённый низкой ценой и желая даром получить лошадь, принял условия продавца, рассчитывая, что за гвозди придётся заплатить не более 10 рублей. Во сколько в действительности обошлась такая покупка?»

10. Известно, что Вселенная расширяется, причём скорость v, с которой галактики удаляются друг от друга, увеличивается по закону *линейного роста* в зависимости от расстояния R между ними: $v = HR$, где $H \approx 65 \frac{\text{км}}{\text{с} \cdot \text{Мпк}}$ — коэффициент пропорциональности, называемый постоянной Хаббла (*Мпк* — мегапарсек — расстояние, которое свет проходит за 3,26 млн лет). Этот закон установил американский астроном *Эдвин Пауэлл*

Хаббл (1889—1953) в 1929 г. Найти скорость удаления галактик, когда расстояние между ними составляет: 1 Мпк; 2 Мпк; 5 Мпк; 10 Мпк.

В этой главе вы узнали,

что такое:

— числовая последовательность;
— способы задания последовательности;
— арифметическая прогрессия;
— формула n-го члена арифметической прогрессии;
— сумма первых n членов арифметической прогрессии;
— свойство членов арифметической прогрессии;
— геометрическая прогрессия;
— формула n-го члена геометрической прогрессии;
— формула суммы первых n членов геометрической прогрессии;
— свойство членов геометрической прогрессии;

как:

— находить члены последовательности, заданной с помощью формулы n-го члена; рекуррентным способом;
— изображать члены последовательности на числовой оси; на координатной плоскости;
— находить n-й член арифметической прогрессии; геометрической прогрессии;
— находить сумму первых n членов арифметической прогрессии; геометрической прогрессии.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

I уровень

1. Вычислить первые три члена последовательности, которая задана формулой n-го члена $a_n = \frac{n^2 - n}{2}$.
2. В арифметической прогрессии $a_1 = 2$, $d = -3$. Найти a_{10} и сумму первых десяти её членов.
3. В геометрической прогрессии $b_1 = 4$, $q = \frac{1}{2}$. Найти b_6 и сумму первых шести её членов.
4. Найти сумму первых пяти членов геометрической прогрессии $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \ldots$

II уровень

5. Числовая последовательность задана формулой $a_n = 2^{n^2-2}$. Число 128 является её членом. Найти его номер.
6. В арифметической прогрессии $a_8 = 19$, $a_{12} = 31$. Найти сумму первых десяти членов этой прогрессии.
7. Сумма первых шести членов геометрической прогрессии равна 10,5, знаменатель прогрессии равен 2. Найти сумму первых трёх членов этой прогрессии.
8. При каком значении x числа x, $3\sqrt{x}$, 5 являются последовательными членами арифметической прогрессии.

III уровень

9. Числовая последовательность задана рекуррентным способом: формулой $a_{n+2} = \frac{a_n + 5a_{n+1}}{2}$ и условиями $a_1 = -1$, $a_2 = 3$. Выяснить, является ли эта последовательность арифметической прогрессией.
10. В арифметической прогрессии $a_2 + a_4 = 6$, $a_6 \cdot a_7 = 99$. Найти a_1.
11. Найти b_1 и q геометрической прогрессии, если сумма первых трёх её членов равна 10,5 и $b_1 - b_4 = 31{,}5$.
12. Второй, первый и третий члены арифметической прогрессии различны и являются в указанном порядке последовательными членами геометрической прогрессии. Найти знаменатель этой прогрессии.

ТЕМЫ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ РАБОТ

1. Последовательность простых чисел. Решето Эратосфена.
2. Прогрессии в трудах древних учёных (начиная со II тысячелетия до н. э.).
3. Проявление чисел Фибоначчи в природе.
4. Спирали Фибоначчи.
5. Числа Фибоначчи в экономике.
6. Арифметико-геометрические прогрессии.
7. Иерархия прогрессий.
8. Числовые последовательности, изучавшиеся Архимедом.
9. Геометрическое обоснование формулы суммы первых n членов арифметической прогрессии.
10. Решение задач на нахождение сумм членов последовательностей с помощью метода математической индукции.

ГЛАВА IV

Случайные события

В окружающем мире немало явлений, о которых достаточно точно известно, как и когда они произойдут. К ним относятся, например, смена дня и ночи, проявления законов Ньютона, химические реакции и т. д.

Но нас окружает множество явлений, о которых мы не можем с уверенностью сказать, как или когда они произойдут. Например, мы не знаем точно, когда произойдёт извержение вулкана Ключевская Сопка, когда начнётся эпидемия гриппа, на какую сторону упадёт подброшенная монета и т. д. Такие явления называют *случайными*, а события, которые в них происходят, — *случайными событиями*.

Тем не менее, наблюдая за тем, как часто и в каких условиях происходят повторяющиеся случайные события, зачастую удаётся установить закономерности их появления и спрогнозировать, когда они произойдут в следующий раз. Например, наблюдая за извержениями конкретного вулкана, вулканологи с определённой степенью точности знают, как часто наступает его активность и когда примерно ждать следующего извержения. Подбрасывая многократно монету, легко убедиться в том, что примерно в половине случаев появляется *орёл*, а в половине — *решка*. Этим наблюдением пользуются, к примеру, судьи футбольных матчей, когда с помощью подбрасывания монеты определяют, на какой половине поля будет играть та или иная команда.

Ещё в древние времена, когда на охоту ходили с копьями и луками, люди понимали, что у них больше шансов на удачу, если в дичь будет целиться не один, а несколько охотников. Когда люди в Средние века увлекались азартными играми (картами, игрой в кости и т. п.), они из многократных наблюдений поняли, что шансы появления 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков при бросании одной кости одинаковы. А вот при одновременном бросании двух костей сумма очков, равная 7, появляется чаще, чем любая другая сумма.

Первые научные обобщения наблюдений за случайными событиями были сделаны в XVI—XVIII вв. Д. Кардано, Б. Паскалем, П. Ферма, Х. Гюйгенсом.

Шансы наступления случайных событий они стали оценивать долями от единицы. В XVIII в. швейцарский математик *Якоб Бернулли (1654—1705)* для обозначения степени уверенности в наступлении того или иного события ввёл термин *вероятность события*.

В настоящее время раздел математики, названный «Теорией вероятностей», занимается изучением математических моделей случайных событий, решением задач на нахождение вероятностей одних событий по вероятностям других событий, исследованием закономерностей в массовых случайных явлениях, прогнозированием их протекания и т. п. Знание объективных закономерностей в случайных явлениях позволяет успешно ими пользоваться в практической деятельности людей, в различных научных исследованиях, в экономике, социологии и др.

Новые пути развития теории вероятностей в XIX в. были найдены русскими математиками *Пафнутием Львовичем Чебышёвым (1821—1894)* и его учениками *Андреем Андреевичем Марковым (1856—1922)* и *Александром Михайловичем Ляпуновым (1857—1918)*. Аксиоматическое построение теории вероятностей принадлежит нашему знаменитому соотечественнику *Андрею Николаевичу Колмогорову (1903—1987)*.

П. Л. Чебышёв

А. А. Марков

А. М. Ляпунов

А. Н. Колмогоров

В этой главе вы познакомитесь с разными подходами к определению понятия вероятности события. Научитесь решать несложные вероятностные задачи, узнаете историю появления и развития теории вероятностей. Поймёте, как знание основ комбинаторики помогает в решении задач на подсчёт вероятностей некоторых событий. Убедитесь в том, что изучаемый в этой главе раздел математики важен для понимания и толкования окружающих нас явлений.

§ 16 События

События, которые происходят или не происходят в определённых условиях, можно сгруппировать по разным признакам. Например, их можно разделить в зависимости от степени возможности их наступления: некоторые события при определённых условиях могут никогда не произойти, а некоторые происходят довольно часто. Можно сгруппировать события по возможности или невозможности их совместного наступления в одном опыте и т. д.
В этом параграфе вы рассмотрите примеры различных видов событий, которые происходят в реальной жизни, а также в специально организованных испытаниях (опытах).

Нужно вспомнить:

- понятия куба, тетраэдра, число граней куба, тетраэдра;
- внешний вид игральной кости (кубика);
- состав колоды игральных карт (36 листов) и набора костяшек домино.

1. Невозможные, достоверные и случайные события

В жизни под событием понимают любое явление, которое происходит или не происходит. Событиями являются и результаты испытаний (опытов), наблюдений и измерений, производимых людьми. Все события можно подразделить на **невозможные, достоверные** и **случайные.**

! **Невозможным** называют событие, которое в данных условиях произойти не может.

Приведём примеры невозможных событий:
1) вода в реке Волге замёрзла при температуре +25 °С;
2) при бросании игральной кости (т. е. кубика, на гранях которого отмечены очки от 1 до 6) появилось 7 очков.

! **Достоверным** называют событие, которое в данных условиях обязательно произойдёт.

Например, достоверными являются события:
1) после четверга наступила пятница;
2) при бросании игральной кости выпало число очков, меньшее семи.

Случайным называют событие, которое в данных условиях может произойти, а может и не произойти.

Случайными являются, например, следующие события:
1) при телефонном звонке абонент оказался занят;
2) при бросании игральной кости выпало 2 очка.

2. Совместные и несовместные события

Два события, которые в данных условиях могут происходить одновременно, называют **совместными**, а те, которые не могут происходить одновременно, — **несовместными**.

Например, события «пошёл дождь» и «наступило утро» являются совместными, а события «наступило утро» и «наступила ночь» — несовместными.

Рассмотрим события, которые могут произойти при одном бросании игральной кости: 1) выпало 2 очка; 2) выпало 5 очков; 3) выпало более 2 очков; 4) выпало число очков, кратное двум. Среди них совместными будут три пары: 1-е и 4-е (число 2 чётное); 2-е и 3-е (5 очков больше, чем 2); 3-е и 4-е (например, 4 очка). Несовместными будут события: 1-е и 2-е (одновременно не могут выпасть 2 разных числа); 1-е и 3-е (более 2 очков, т. е. 3, 4, 5 или 6 одновременно с 2 очками появиться не могут); 2-е и 4-е (число 5 не кратно 2).

3. Равновозможные события

Рассмотрим группы событий:

1) «появление орла» и «появление решки» при одном бросании монеты;

2) «появление 1 очка», «появление 2 очков», ..., «появление 6 очков» при одном бросании игральной кости;

3) «падение бутерброда маслом вверх» и «падение бутерброда маслом вниз» при одном падении бутерброда;

4) «изъятие из полного набора домино дубля» и «изъятие из полного набора домино костяшки с разными очками» в результате изъятия одной костяшки.

Орёл Решка

В примерах 1 и 2 нет оснований полагать, что в наступлении одного из событий есть какое-то преимущество (если монета и кубик правильные). Такие события называются **равновозможными**. Часто равновозможность событий удаётся установить из соображений симметрии.

Примеры 3 и 4 демонстрируют образцы **неравновозможных** событий. Действительно, бутерброд чаще падает маслом вниз (из-за того, что после намазывания хлеба маслом центр тяжести бутерброда смещается из центра его симметрии в сторону слоя масла). При изъятии одной костяшки из полного набора домино, скорее всего, появится костяшка с разными очками (так как дублей в наборе домино всего 7, а остальных костяшек 21).

Устные вопросы и задания

1. Что такое событие?
2. Какое событие называют невозможным; достоверным; случайным? Привести примеры событий каждого из этих видов.
3. Какую пару событий называют совместными; несовместными?
4. Какие события называют равновозможными? Привести пример испытания, в котором могут произойти равновозможные события. Перечислить эти события.
5. Привести примеры неравновозможных событий, которые могут произойти в одном опыте.

Вводные упражнения

1. Назвать агрегатное состояние воды, находящейся в условиях нормального атмосферного давления при температуре t °C, если: 1) $t < 0°$; 2) $0° < t < 100°$; 3) $t > 100°$.
2. Какое число очков может появиться на верхней грани игральной кости, брошенной на стол?
3. Как обычно называют стороны монеты?
4. Какой стороной может упасть монета при бросании её на пол?
5. Может ли ученику 9 класса в следующем году исполниться на год меньше лет, чем в этом году?
6. Может ли автобус прийти на остановку на 1 мин раньше, чем положено по расписанию?
7. Может ли книга, раскрытая наугад, открыться на страницах 4 и 5; на страницах 11 и 12?

Упражнения

В упражнениях **267—271** описаны условия и происходящие в них события. Для каждого из этих событий (устно) определить, каким оно является: невозможным, достоверным или случайным.

267. Из 25 учащихся класса: 1) двое справляют день рождения 30 января; 2) все справляют день рождения 30 января.

268. Случайным образом открывается учебник литературы и находится второе слово на левой странице. Это слово начинается: 1) с буквы К; 2) с буквы Ь.

269. Из списка журнала IX класса (в котором есть и девочки, и мальчики) случайным образом выбран один ученик: 1) это мальчик; 2) выбранному ученику 14 лет; 3) выбранному ученику 15 месяцев; 4) этому ученику больше двух лет.

270. Сегодня в Сочи барометр показывает нормальное атмосферное давление. При этом: 1) у жительницы Сочи вода в кастрюле закипела при $t = 80$ °C; 2) когда температура воздуха упала до −5 °C, вода в луже замёрзла.

271. Бросают две игральные кости: 1) на одной кости выпало 3 очка, а на другой — 5 очков; 2) сумма выпавших на двух костях очков равна 1; 3) сумма выпавших на двух костях очков равна 13; 4) на обеих костях выпало по 3 очка; 5) сумма очков на двух костях меньше 15.

В упражнениях 272—274 среди данных пар событий указать, какие являются совместными, а какие — несовместными.

272. В сыгранной Катей и Славой партии в шахматы: 1) Катя выиграла; Слава проиграл; 2) Катя проиграла; Слава проиграл.

273. Брошена игральная кость. На верхней грани оказалось: 1) 6 очков; 5 очков; 2) 6 очков; чётное число очков.

274. Из набора домино (рис. 28) вынута одна костяшка, на ней: 1) одно число очков больше 3, другое число 5; 2) одно число не меньше 6, другое число не больше 6; 3) одно число 2, сумма обоих чисел равна 9; 4) оба числа больше 3, сумма чисел равна 7.

275. Из событий: 1) «идёт дождь»; 2) «на небе нет ни облачка»; 3) «наступило лето» — составить всевозможные пары и выявить среди них пары совместных и пары несовместных событий.

276. Из событий: 1) «наступило утро»; 2) «сегодня по расписанию 6 уроков»; 3) «сегодня первое января»; 4) «температура воздуха в Салехарде +20 °C» — составить всевозможные пары и

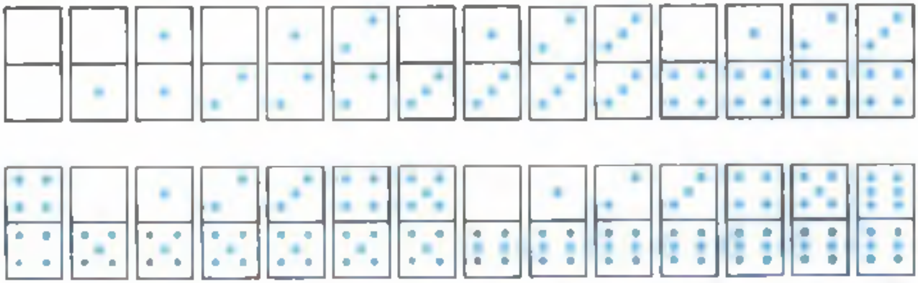


Рис. 28

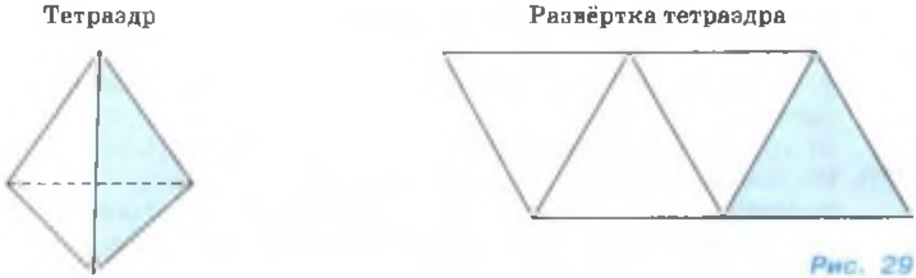


Рис. 29

выявить среди них пары совместных и пары несовместных событий.

277. Имеется правильная треугольная пирамида — тетраэдр (рис. 29). Одна из её граней синяя, а 3 другие белые. Тетраэдр бросают на стол и наблюдают за гранью, которой он соприкасается со столом. Являются ли равновозможными события «тетраэдр упал на синюю грань» и «тетраэдр упал на белую грань»?

278. Бросается игральный кубик, у которого: 1) 2 грани; 2) 3 грани — окрашены в красный цвет, а остальные — в жёлтый. Являются ли равновозможными события «выпала жёлтая грань» и «выпала красная грань»?

279. Из полной колоды в 36 карт (рис. 30) наугад вынимается одна карта. Являются ли равновозможными события:

1) «вынута карта красной масти» и «вынута карта чёрной масти»;

2) «вынут король» и «вынута дама»;

Рис. 30

3) «вынута карта бубновой масти» и «вынута карта червовой масти»;

4) «вынута карта пиковой масти» и «вынута карта красной масти»;

5) «вынута шестёрка треф» и «вынута дама пик»?

280. Из полной колоды карт вынимается одна карта. Выяснить, являются совместными или несовместными события:

1) «вынута карта красной масти» и «вынут валет»;

2) «вынут король» и «вынут туз».

Разговор о важном

Условия постановки случайного опыта

Профессор, почему в тексте параграфа при описании различных событий всякий раз говорится об условиях, в которых эти события происходят? Разве нельзя сказать просто: «Появление 6 очков — случайное событие»?

Скажи, пожалуйста, а если ставится опыт с бросанием монеты, то по отношению к этому опыту «появление 6 очков» тоже будет случайным событием?

Конечно, нет. Понятно же, что когда говорят о появившемся числе очков, то имеют в виду, что брошена игральная кость.

Допустим, что брошена вовсе не игральная кость, а прочитаны очки, например, на костяшке домино. Шесть очков могли появиться и после раскручивания рулетки. А бросить могли, к примеру, не одну, а две игральные кости...

Поняла: нужно всегда уточнять условия опыта, в котором рассматривается то или иное событие.

Хочу, чтобы вы до конца поняли, о каких опытах идёт речь при изучении теории вероятностей. Рассматриваются *случайные опыты (случайные эксперименты)*, которые можно производить при неизменных условиях сколько угодно раз и результат каждого из которых заранее не известен. К таким опытам относятся опыты с бросанием монет и игральных костей; изъятие карт из колоды, костяшек домино из набора, схожих предметов из коробки (ящика) и т. п.

Профессор, при изучении параграфа мне было непонятно: почему, например, при бросании монеты не рассматривался исход «монета встала на ребро»?

Потому что в теории вероятностей рассматриваются так называемые *математические монеты* — идеальные монеты, лишённые многих качеств реальных монет. Считается, что математическая монета имеет только две стороны. Такая монета имеет равные шансы упасть *орлом* и *решкой* вверх, не может ни укатиться, ни потеряться, ни встать на ребро.

§ 17 Вероятность события

Точно неизвестно, когда люди стали задумываться о количественном измерении возможности (шансов) появления того или иного случайного события. Долгое время исследования ограничивались наблюдениями за играми в кости и решались проблемы раздела ставки между игроками. Но учёные уже в XVI в. поняли, что в процессе этих наблюдений закладываются основы новой математической теории.
В этом параграфе вы познакомитесь с историей возникновения понятия вероятности события. Поймёте, как находить вероятность события в опыте с равновозможными исходами, научитесь решать классические вероятностные задачи.

Нужно вспомнить:

- понятия опыта (испытания) и события;
- понятия невозможного, достоверного и случайного событий;
- понятия совместных и несовместных событий;
- понятие равновозможных событий.

Встречаясь в жизни с различными событиями, мы часто даём оценку степени их достоверности. При этом произносим, например, такие слова:

«Это невероятно!» — говорим о невозможном событии, например о том, что вода в холодильнике закипела.

«Маловероятно, что сегодня будет дождь», — говорим, глядя на безоблачное небо летним утром.

«Наверняка это случится!», «Я уверен, что это произойдёт!» — говорим, например, о предполагаемой двойке за контрольную работу, если изучаемая тема не была усвоена.

«Шансы равны», «Один к одному» или «Шансы пятьдесят на пятьдесят» — говорим, например, о возможности победы в соревнованиях двух одинаково подготовленных спортсменов или когда делаем ставку на орла или решку при подбрасывании монеты.

Вопрос о возможности **измерения степени достоверности** наступления какого-либо события задавали себе ещё в XVII в. французские учёные *Блез Паскаль (1623—1662)* и *Пьер Ферма (1601—1665)*. Наблюдая за игрой в кости, Паскаль высказал идею измерения степени уверенности в выигрыше (шансы выигрыша) некоторым числом. Действительно, рассуждал Паскаль, когда игрок бросает игральную кость, он не знает, какое число очков выпадет.

Но он знает, что каждое из чисел 1, 2, 3, 4, 5 и 6 имеет одинаковую долю успеха (равные шансы) в своём появлении. Игрок также знает, что появление одного из этих чисел в каждом испытании (броске) — событие достоверное. Если принять возможность наступления достоверного события за 1, то возможность появления, например, шестёрки (равно как и любого другого числа очков) в 6 раз меньше, т. е. равна $\frac{1}{6}$.

Долю успеха того или иного события математики стали называть **вероятностью** этого события и обозначать буквой P (по первой букве латинского слова *probabilitas* — вероятность).

Если буквой A обозначить событие «выпало 6 очков» при одном бросании игральной кости, то вероятность события A обозначают $P(A)$ и записывают $P(A) = \frac{1}{6}$ (читается: «Пэ от А равно одной шестой» или «Вероятность события A равна одной шестой»).

Задача 1. Поверхность рулетки (её вид сверху изображён на рисунке 31) разделена диаметрами на 4 равные части. Найти вероятность того, что раскрученная стрелка рулетки остановится на секторе 3.

▶ Так как площади секторов поверхности рулетки одинаковы, то в одном испытании с раскручиванием стрелки существуют 4 равновозможных события (**исхода испытания**); стрелка остановится: 1) на секторе 1; 2) на секторе 2; 3) на секторе 3; 4) на секторе 4. Достоверное событие — «стрелка остановится на каком-либо из секторов». Вероятность наступления достоверного события равна 1, а вероятность события A — «стрелка остановится на секторе 3», в 4 раза меньше, т. е. $P(A) = \frac{1}{4}$. ◁

Рис. 31

В испытаниях с бросанием кости, с раскручиванием стрелки рулетки мы имели дело с так называемыми **элементарными событиями (исходами)** — попарно несовместными событиями, одно из которых обязательно происходит в результате испытания.

Помимо рассмотренных выше **элементарных событий**, можно изучать и более сложные события, которые могут происходить в этих испытаниях. Например, такие: «выпадение чётного числа очков (2, 4 или 6) при одном бросании игральной кости»; «остановка стрелки рулетки не на секторе 2» и т. д.

Рассмотрим событие A — «выпало чётное число очков», в результате одного бросания игральной кости. Это событие наступает в 3 случаях (исходах) — когда выпадает или 2, или 4, или 6 очков. Говорят, что это **благоприятствующие** событию A исходы. Три благоприятствующих исхода составляют половину от **всех возможных исходов** испытания (которых 6), поэтому вероятность событий A равна:

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

! Определение. Если в некотором испытании существует n равновозможных элементарных событий (исходов) и m из них благоприятствуют событию A, то **вероятностью наступления события** A называют отношение $\frac{m}{n}$ и записывают

$$P(A) = \frac{m}{n}. \qquad (1)$$

Задача 2. Найти вероятность появления при одном бросании игральной кости числа очков, большего 4.

▶ Событию A — «появление числа очков, большего 4», благоприятствуют 2 исхода (появление 5 и появление 6 очков), т. е. $m=2$. Число всех равновозможных исходов $n=6$, поэтому $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. ◁

Задача 3. Поверхность рулетки разделена на 8 равных секторов. Найти вероятность того, что после раскручивания стрелка рулетки остановится на закрашенной части рулетки (рис. 32).

▶ Существует 8 равновозможных исходов испытания: стрелка остановится на секторе 1, на секторе 2, ..., на секторе 8, т. е. $n=8$. В закрашенную часть рулетки попадают 3 сектора (4, 5 и 6-й), т. е. число благоприятствующих исходов $m=3$. Тогда $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{8}$. ◁

Рис. 32

О вероятностях наступления достоверных, невозможных и случайных событий на основании формулы (1) можно рассуждать следующим образом:

Если событие A достоверное, то ему благоприятствуют все возможные исходы испытания, т. е. $m=n$. Тогда $P(A) = \frac{m}{n} = 1$.

Если событие A невозможное, то не существует исходов, благоприятствующих его появлению, т. е. $m=0$. Тогда $P(A)=\frac{0}{n}=0$.

Если событие A случайное, то число m благоприятствующих его появлению исходов удовлетворяет условию $0<m<n$. Тогда $0<P(A)=\frac{m}{n}<1$.

Таким образом, для вероятности $P(A)$ любого события A справедливы неравенства $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

Устные вопросы и задания

1. Воспроизвести рассуждения Б. Паскаля о возможности измерения числом $\frac{1}{6}$ шансов появления, например, 6 очков в результате одного бросания игральной кости.
2. Что назвали вероятностью события основоположники теории вероятностей?
3. Как обозначают вероятность события A?
4. Какие события называют элементарными событиями (исходами) испытания?
5. Что называют благоприятствующими событию A исходами испытания?
6. Сформулировать определение вероятности наступления события A.
7. Чему равна вероятность достоверного; невозможного события?
8. Какие числовые значения может принимать вероятность события?

Вводные упражнения

1. Перечислить все возможные исходы испытания с одним бросанием монеты; игральной кости. Являются ли эти исходы равновозможными?
2. Из полного набора домино вынимается одна костяшка. Являются ли равновозможными события «вынута костяшка с числами 1 и 1», «вынута костяшка с числами 6 и 6»?
3. Из полной колоды карт (36 листов) вынимается одна карта. Являются ли равновозможными события «вынута карта с картинкой» и «вынута карта с числом»?

Упражнения

281. Перечислить все элементарные равновозможные события, которые могут произойти в результате: 1) бросания монеты; 2) бросания игральной кости; 3) бросания тетраэдра с гранями, занумерованными числами 1, 2, 3, 4; 4) раскручивания стрелки рулетки, поверхность которой разделена на 5 одинаковых секторов, обозначенных буквами A, B, C, D и E.

282. Заполнить таблицу.

Номер задания	Испытание	Число всех элементарных равновозможных событий — исходов испытания (n)	Изучаемое событие A	Число исходов, благоприятствующих событию A (m)	Вероятность наступления события A
1	Бросание игральной кости		Выпавшее число очков нечётно		
2	Бросание игральной кости		Выпавшее число очков кратно трём		
3	Изъятие из полного набора домино одной костяшки		Изъята костяшка с очками 2 и 6		
4	Изъятие из полного набора домино одной костяшки		Изъят дубль		
5	Раскручивание стрелки рулетки, разделённой на 8 равных секторов, занумерованных числами от 1 до 8		Остановка стрелки на секторе с номером, кратным 4		
6	Раскручивание стрелки рулетки, разделённой на 8 равных секторов, занумерованных числами от 1 до 8		Остановка стрелки на секторе, номер которого не больше 6		

283. В ящике находятся 2 белых и 3 чёрных шара. Наугад вынимается один шар. Какова вероятность того, что вынутый шар: 1) белый; 2) чёрный; 3) зелёный; 4) белый или чёрный?

284. В ящике находятся 2 белых, 3 чёрных, 4 красных шара. Наугад вынимается один шар. Какова вероятность того, что этот шар: 1) белый; 2) чёрный; 3) красный; 4) не белый; 5) не чёрный; 6) не красный?

285. На одинаковых карточках написаны числа от 1 до 10 (на каждой карточке — одно число). Карточки положили на стол, перевернули числами вниз и перемешали. Какова вероятность того, что на вынутой карточке окажется число: 1) 7; 2) чётное; 3) кратное 3; 4) кратное 4; 5) делящееся на 5; 6) простое?

286. Таня забыла последнюю цифру номера телефона знакомой девочки и набрала её наугад. Какова вероятность того, что Таня попала к своей знакомой?

287. В лотерее 1000 билетов, среди которых 20 выигрышных. Приобретается один билет. Какова вероятность того, что этот билет: 1) выигрышный; 2) невыигрышный?

288. Студент при подготовке к экзамену не успел выучить один из тех 25 билетов, которые будут предложены на экзамене. Какова вероятность того, что студенту достанется на экзамене выученный билет?

289. Допустим, что 5 раз подбрасывалась монета и каждый раз выпадал орёл. Какова вероятность того, что при новом броске выпадет орёл?

290. Из колоды карт (36 листов) наугад вынимается одна карта. Какова вероятность того, что эта карта: 1) шестёрка треф; 2) семёрка; 3) король красной масти; 4) карта бубновой масти с числом; 5) карта червовой масти с чётным числом?

291. Деревянный окрашенный кубик $3 \times 3 \times 3$ распилили на 27 одинаковых кубиков $1 \times 1 \times 1$ (рис. 33). Кубики перемешали и выбрали наугад один из них. Найти вероятность события:

1) A — у кубика окрашены 3 грани;
2) B — у кубика окрашены ровно 2 грани;
3) C — у кубика окрашена только одна грань;
4) D — у кубика нет ни одной окрашенной грани.

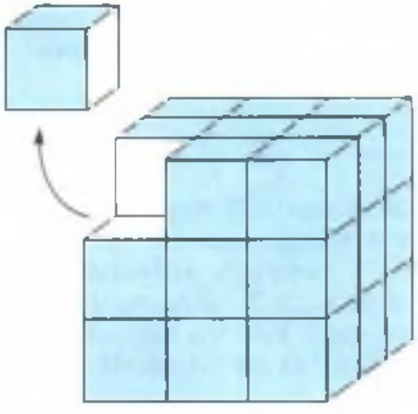


Рис. 33

Происхождение слова *азарт*.
Ошибки учёных при решении вероятностных задач

Профессор, я давно хотел узнать, почему игры в карты и кости называют азартными? Потому что они вызывают *азарт* — возбуждение, увлечение, горячность?

Во многих толковых словарях слово *азарт* трактуется как *возбуждение*. И действительно, эти два слова мы уже воспринимаем как синонимы. На самом деле слово *азарт* произошло от арабского слова *азар*, что означает *трудный*. Этим термином арабы называли трудную, редко появляющуюся комбинацию очков при игре в кости. Например, при бросании двух игральных костей трудным (азартным) считалось появление в сумме двух или двенадцати очков.

Понятно, откуда произошло это слово: игрок, бросая кости, с возбуждением ждал — вдруг ему повезёт и выпадет азартная сумма очков.

Замечу, что слово *hazard* (читается как *азарт*) есть во французском словаре. И хотя туда оно пришло из арабского языка, трактуется в словаре уже как *случай* или *риск*.

Профессор, расскажите, пожалуйста, о первых задачах, которые решали создатели теории вероятностей.

Первые вероятностные задачи начали формулировать не учёные, а в основном богатые игроки. История математики знает несколько задач, которые задал в XVII в. Б. Паскалю знатный французский кавалер де Мере.

При решении первых задач вероятности ошибались многие учёные. Известно, например, что в 1494 г. итальянский математик *Фра Лука Бартоломео де Пачоли (1445—1517)* не смог верно решить следующую задачу: «Два игрока договорились играть в кости до тех пор, пока одному из них не удастся выиграть n партий. Но игра была прервана после того, как первый игрок выиграл a партий ($a < n$), а второй — b партий ($b < n$). Как справедливо разделить ставку?

Пачоли (предполагая, что игроки играют «равносильно») предлагал разделить ставку в отношении $a : b$, не учитывая партии, которые нужно ещё выиграть, чтобы получить ставку.

Спустя почти 50 лет Д. Кардано опроверг рассуждения Л. Пачоли и предложил своё, но также ошибочное, решение этой задачи. И только по прошествии ещё почти 100 лет эта задача была решена Б. Паскалем во время переписки с П. Ферма.

История математики хранит ошибку, которую допустил при решении вероятностной задачи известный французский математик XVIII в.

Жан Лерон Д'аламбер (Даламбер) (1717—1783). Рассматривая опыт с бросанием двух монет, он посчитал, что имеются три равновозможных исхода: выпали «орёл и орёл», «орёл и решка», «решка и решка» (подробно к этому опыту мы с вами вернёмся в следующем параграфе, и вы сами найдёте ошибку Ж. Даламбера).

Шаг вперёд

Решение задачи Пачоли

Профессор, Вы наверняка знаете верное решение задачи Л. Пачоли, которое нашёл Паскаль. Мы сможем его понять?

Надеюсь, что в конкретном случае сможете. Рассмотрим эту задачу при $n = 3$, $a = 2$, $b = 1$. То есть игра была прервана, когда первому игроку оставалось выиграть 1 партию, а второму — 2. На этом этапе ещё непонятно, как делить ставку. Но всё стало бы очевидным, если бы игроки сыграли ещё одну партию. Тогда были бы возможны два случая:

1) если бы выиграл первый игрок, он бы набрал 3 выигрышных партии и забрал бы всю ставку, а второй игрок не получил бы ничего;

2) если бы выиграл второй игрок, то получилось бы, что оба игрока выиграли по 2 партии, и тогда справедливо разделить ставку пополам.

Возможности выигрыша одной партии у каждого игрока в обоих случаях одинаковы. Таким образом, первый игрок может выиграть либо всю ставку, либо ее половину, т. е. в среднем $\frac{1 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}$ ставки. Второй игрок может либо ничего не выиграть, либо выиграть $\frac{1}{2}$ ставки, т. е. в среднем $\frac{0 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$ ставки. Поэтому Б. Паскаль предлагал разделить ставки в отношении $3 : 1$ (тогда как, по мнению Л. Пачоли, её следовало бы разделить в отношении $2 : 1$).

Замечу, что при решении этой задачи заложена подготовка к введению понятия *математическое ожидание*, с которым интересующиеся математикой учащиеся смогут познакомиться в следующей главе.

§ 18 Решение вероятностных задач с помощью комбинаторики

Не всегда число всех элементарных исходов испытания легко определить сразу. Часто для его нахождения, а также для подсчёта числа благоприятствующих исходов испытания требуются приемы, правила и формулы комбинаторики. Рассмотрению вероятностных задач, в которых число исходов испытания находится с помощью графов или комбинаторного правила произведения, и посвящён материал этого параграфа.

Нужно вспомнить:

- подсчёт комбинаций из небольшого числа элементов, в которых порядок их расположения имеет значение; не имеет значения;
- комбинаторное правило произведения;
- перебор вариантов с помощью таблицы; графов (в частности, схемы-дерева);
- понятия перестановки и факториала из n элементов;
- нахождение числа всех перестановок из n элементов;
- определение вероятности события.

Задача 1. Брошены две монеты. Какова вероятность того, что появятся: 1) два орла; 2) орёл и решка?

▶ Составим таблицу вариантов, позволяющую определить все возможные исходы в результате бросания двух монет. Появление орла в таблице обозначено буквой О, а появление решки — буквой Р.

1-я монета	2-я монета	
	О	Р
О	ОО	ОР
Р	РО	РР

Из таблицы видно, что число возможных исходов в испытании $n = 2 \cdot 2 = 4$.

1) Событию A — появлению двух орлов благоприятствует один исход (ОО), т. е. $m = 1$, поэтому $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{4}$.

2) Событию B — появлению орла и решки благоприятствуют 2 исхода (ОР и РО), т. е. $m = 2$. Тогда $P(B) = \frac{m}{n} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Ответ. 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{2}$. ◁

Напомним **правило произведения**, сформулированное при изучении элементов комбинаторики в 7 классе.

! Если существует n вариантов выбора первого элемента и для каждого из них есть m вариантов выбора второго элемента, то существует $n \cdot m$ различных пар с выбранными первым и вторым элементами.

Задача 2. Брошены две игральные кости: одна белого, другая красного цвета. Какова вероятность того, что: 1) на белой кости выпадет 6 очков, а на красной — нечётное число очков; 2) на одной кости выпадет 6 очков, а на другой — нечётное число очков?

▶ Согласно правилу произведения число возможных исходов испытания $n = 6 \cdot 6 = 36$. Составим таблицу возможных исходов бросания двух игральных костей.

Белая кость	Красная кость					
	1	2	3	4	5	6
1	11	12	13	14	15	**16**
2	21	22	23	24	25	26
3	31	32	33	34	35	**36**
4	41	42	43	44	45	46
5	51	52	53	54	55	**56**
6	**61**	62	**63**	64	**65**	66

1) Исходы, благоприятствующие событию A — появлению на белой кости 6 очков, на красной — нечётного числа очков, выделены в последней строке таблицы. Их 3, т. е. $m = 3$. Таким образом, $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

2) Исходы, благоприятствующие событию B — появлению на одной кости 6 очков, а на другой — нечётного числа очков, выделены в таблице исходов (к трём исходам, рассмотренным в предыдущем задании, добавляются ещё три за счёт появления 6 очков на красной кости и нечётного числа очков на белой. Таким образом, $m = 6$, и, следовательно, $P(B) = \frac{m}{n} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Ответ. 1) $\frac{1}{12}$; 2) $\frac{1}{6}$. ◁

Задача 3. Какова вероятность того, что сумма очков, выпавших на двух брошенных костях, равна 5?

▶ Общее число исходов испытания, как и в задаче 2 равно 36. Выпишем из последней таблицы все исходы, благоприятствующие интересующему нас событию A (сумма очков на двух костях равна 5): 14; 23; 32; 41.

Таким образом, $m = 4$ и $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$. ◁

Задача 4. В ящике имеется 3 одинаковых по размеру кубика: красный (к), чёрный (ч) и белый (б). Вытаскивая их наугад, кладём 3 кубика на стол последовательно один за другим. Какова вероятность того, что появится последовательность кубиков «ч б к»?

▶ Общее число n исходов расстановки в ряд вынутых из ящика 3 кубиков равно числу перестановок из трёх элементов: $n = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$. Только один из этих исходов является благоприятствующим событию «ч б к», т. е. $m = 1$. Таким образом, вероятность интересующего нас события $P = \frac{1}{6}$. ◁

Задача 5. В ящике имеется 3 одинаковых по размеру кубика: два чёрных ($ч_1$ и $ч_2$) и один белый (б). Вытаскивая кубики наугад один за другим, их ставят последовательно на стол. Какова вероятность того, что сначала будут вынуты два чёрных кубика, а последним — белый?

▶ Общее число исходов, как и в предыдущей задаче, равно 6. Однако благоприятствующими рассматриваемому событию будут 2 исхода: «$ч_1\, ч_2\, б$» и «$ч_2\, ч_1\, б$» (см. рисунок 34 с деревом исходов), поэтому вероятность изучаемого события равна $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. ◁

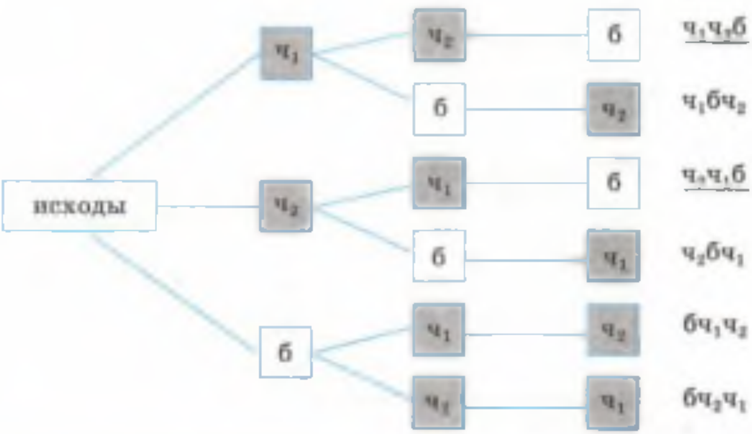


Рис. 34

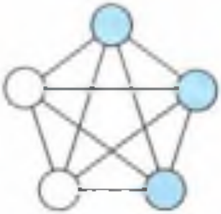


Рис. 35

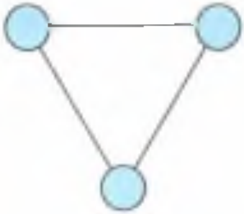


Рис. 36

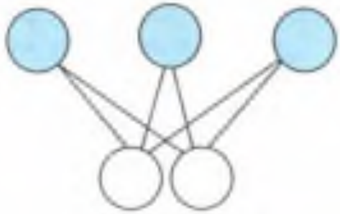


Рис. 37

Задача 6. В коробке лежат 2 белых и 3 чёрных шара. Наугад вынимают одновременно 2 шара. Найти вероятность события:
1) A — вынуты 2 белых шара; 2) B — вынуты 2 чёрных шара; 3) C — вынуты белый и чёрный шары.

▶ Из 5 шаров можно составить $\frac{(5-1)5}{2}=10$ различных пар (см. граф на рисунке 35). Таким образом, число всевозможных исходов испытания $n=10$.

1) Событию A благоприятствует единственная пара белых шаров, т. е. $m=1$. Находим $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{1}{10}$.

2) Событию B благоприятствуют 3 исхода — 3 различные пары из 3 чёрных шаров (см. граф на рисунке 36), т. е. $m=3$. Таким образом $P(B)=\frac{m}{n}=\frac{3}{10}$.

3) Событию C благоприятствуют 6 исходов (см. граф на рисунке 37), т. е. $m=6$. Отсюда $P(C)=\frac{m}{n}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$.

Ответ. 1) $\frac{1}{10}$; 2) $\frac{3}{10}$; 3) $\frac{3}{5}$. ◁

Устные вопросы и задания

1. Сформулировать комбинаторное правило произведения.
2. Сколько существует элементарных исходов в опыте с бросанием двух монет; двух игральных костей?
3. В опыте с одним бросанием двух монет перечислить все исходы, благоприятствующие событию A — появились *орёл* и *решка*.
4. В опыте с одним бросанием двух игральных костей перечислить все исходы, благоприятствующие событию: A — сумма выпавших очков равна 3; B — сумма выпавших очков не больше 3.
5. Сколько всевозможных пар можно составить из 3 различных элементов, если порядок расположения элементов в паре имеет значение; не имеет значения?

Вводные упражнения

1. Цифрами 3, 4 и 5 записать всевозможные двузначные числа, в которых цифры должны быть разными; могут повторяться.
2. Цифрами 8 и 9 записать всевозможные трёхзначные числа.
3. Сколькими способами четверо детей могут занять очередь на аттракцион?
4. Пятеро друзей при встрече обменялись рукопожатиями (каждый пожал один раз руку каждого). Сколько всего рукопожатий было совершено?
5. Четверо друзей при расставании обменялись фотографиями (каждый подарил каждому одну свою фотографию). Сколько всего фотографий было роздано?
6. Найти значение выражения: 1) $5 \cdot 4!$; 2) $\frac{25!}{24!}$; 3) $P_5 - P_2$; 4) $\frac{P_7}{P_4}$.

Упражнения

292. Бросают две монеты. Какова вероятность того, что: 1) выпадут две решки; 2) выпадут орёл и решка?

293. Бросают две монеты — копейку и пятак. Какова вероятность того, что: 1) на обеих монетах появится орёл; 2) на копейке появится орёл, а на пятаке — решка?

294. Бросают две игральные кости — жёлтую и зелёную. Какова вероятность того, что появятся:

1) на жёлтой кости 2 очка, на зелёной 3 очка; 2) на одной кости 2 очка, а на другой 3 очка; 3) на жёлтой кости 5 очков; 4) на жёлтой кости чётное число очков; 5) на обеих костях чётные очки; 6) на жёлтой кости число очков, кратное 3, а на зелёной — чётное число очков; 7) на обеих костях одинаковые очки; 8) очки, сумма которых равна 3; 9) очки, сумма которых не больше 3; 10) очки, сумма которых равна 11; 11) очки, сумма которых равна 10; 12) очки, сумма которых не меньше 10?

295. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что произведение выпавших на костях очков равно: 1) 5; 2) 4; 3) 10; 4) 12.

296. На трёх карточках написаны цифры 1, 2 и 3 (на каждой карточке по одной цифре). Случайным образом из этого набора выбирают последовательно по одной карточке и кладут в ряд, образуя трёхзначное число. Какова вероятность того, что образуется число: 1) 321; 2) 231?

297. 4 одинаковых шара пронумерованы числами 1, 2, 3, 4 и сложены в ящик. Случайным образом из ящика извлекают по одному шару. Какова вероятность того, что шары были извлечены в последовательности: 1) 4, 2, 1, 3; 2) 4, 3, 2, 1?

298. Брошены 3 игральные кости. Какова вероятность того, что: 1) на всех костях выпало по 2 очка; 2) на двух костях выпало по 2 очка, а на одной — 6 очков?

299. На каждой из двух карточек написана цифра 1, а на третьей — цифра 2. Эти три карточки перемешиваются и случайным образом выкладываются в ряд. Какова вероятность того, что образовалось число: 1) 112; 2) 121?

$\boxed{\textbf{300.}}$ Из 4 шаров, занумерованных числами 1, 2, 3 и 4, наугад выбирают 2 шара. Какова вероятность того, что вынутые шары имеют номера 2 и 3?

$\boxed{\textbf{301.}}$ В ящике лежат 1 белый и 3 чёрных шара. Наугад вынимают 2 шара. Какова вероятность того, что вынуты: 1) 2 чёрных шара; 2) белый и чёрный шары?

$\boxed{\textbf{302.}}$ В ящике находятся 2 белых и 2 чёрных шара. Наугад вынимают 2 шара. Найти вероятность того, что вынуты: 1) 2 белых шара; 2) один белый и один чёрный шары?

$\boxed{\textbf{303.}}$ В ящике находятся 4 белых и 1 чёрный шар. Наугад вынимают 2 шара. Найти вероятность того, что вынуты: 1) 2 белых шара; 2) белый и чёрный шары.

$\boxed{\textbf{304.}}$ Из колоды карт (36 листов) наугад вынимают 2 карты. Какова вероятность того, что это: 1) дама треф и валет пик; 2) две шестёрки?

Шаг назад

Комбинаторные исследования Галилея для игры в кости

В древние и Средние века люди чаще всего играли в три кости и значение придавалось выпадающей на брошенных трёх костях сумме очков. Долгое время игроки считали, например, что безразлично, какой сумме очков: 9 или 10 — отдавать предпочтение, так как и для той, и для другой суммы существует 6 наборов из трёх слагаемых очков.

Действительно, 10 получается в шести вариантах слагаемых:

$$6+3+1,\ 6+2+2,\ 5+4+1,\ 5+3+2,\ 4+4+2,\ 4+3+3,$$

и 9 получается в шести вариантах:

$$6+2+1,\ 5+3+1,\ 5+2+2,\ 4+4+1,\ 4+3+2,\ 3+3+3.$$

Значит, шансы получить в сумме 9 или 10 очков одинаковы?

Так раньше рассуждали многие игроки. Но на практике они убеждались, что сумма в 10 очков появляется всё же чуть чаще, чем сумма в 9 очков. А вы после решения достаточно большого количества вероятностных задач должны сами понять, почему $P(A) > P(B)$, где событие A — сумма выпавших очков равна 10, а событие B — сумма выпавших очков равна 9.

Я догадываюсь почему. Если имеющиеся кости пронумеровать, то станет понятно, что каждое слагаемое любой из перечисленных сумм может появиться на любой из трёх костей. Если порядковый номер слагаемого в сумме соответствует номеру кости, то, например, сумма 10, образованная из слагаемых 6, 3 и 1 может появиться в одном из 6 видов: $6+3+1$, $6+1+3$; $3+6+1$, $3+1+6$, $1+6+3$, $1+3+6$. Сумма, в которой два слагаемых одинаковы, может появиться всего в трёх видах. Например, сумма $4+3+3$ может появиться ещё и так: $3+4+3$ и $3+3+4$, т. е. всего в трёх вариантах. Сумма из трёх одинаковых слагаемых $(3+3+3)$ единственная.

Ты абсолютно прав. Г. Галилей в своей работе «О выходе очков при игре в кости» приводит, в частности, следующую таблицу:

10		9		8		7		6		5		4		3	
613	6	621	6	611	3	511	3	411	3	311	3	211	3	111	1
622	3	531	6	521	6	421	6	321	6	221	3				
541	6	522	3	431	6	331	3	222	1						
532	6	441	3	422	3	322	3								
442	3	432	6	332	3										
433	3	333	1												
	27		25		21		15		10		6		3		1

В верхней строке этой таблицы указаны значения сумм выпавших очков. Далее в клетках три цифры рядом показывают, из каких выпавших очков образуется соответствующая сумма. Справа от этих цифр однозначное число (6, 3 или 1) показывает, сколько существует вариантов получения на трёх костях этой суммы. Числа, стоящие внизу столбцов, указывают, фактически, число всех благоприятствующих появлений данной суммы исходов. Так что вы теперь легко можете найти $P(A)$ и $P(B)$.

Число всех возможных исходов испытания с бросанием трёх игральных костей легко находится по правилу произведения: $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$. Значит, $P(A) = \frac{27}{216} = \frac{1}{8}$; $P(B) = \frac{25}{216}$. Действительно, $P(A) > P(B)$.

Галилей в своей книге рассматривал число исходов, благоприятствующих появлению сумм, больших чем 10?

Да, если вам интересно, убедитесь сами, что для другой половины возможных сумм выпавших очков соответствующие числа благоприятствующих исходов «симметричны» тем числам, которые указаны в таблице: сумме 11 благоприятствует 27 исходов, сумме 12 – 25 исходов, ..., сумме 18 – 1 исход.

§ 19 Сложение и умножение вероятностей

Вычисление вероятностей интересующих нас событий не всегда оказывается простой задачей. Иногда для нахождения вероятностей одного события бывает удобно воспользоваться известными вероятностями других событий, с ним связанных. В этом параграфе будут рассмотрены понятия суммы и произведения событий, а также способы нахождения вероятностей суммы и произведения двух определённых событий, вероятности которых известны (или легко находятся).

Нужно вспомнить:

- понятия опыта (испытания) и события;
- понятие благоприятствующего исхода испытания;
- определение несовместных событий;
- понятие элементарных событий;
- элементарные исходы испытания в опыте с бросанием монеты; двух монет; игральной кости; двух игральных костей.

1. Сложение вероятностей

Рассмотрим понятие суммы событий и способ нахождения вероятности суммы несовместных событий.

! Определение. **Суммой событий** A и B (которые могут произойти в одном испытании) называется событие $A+B$, которое состоит в том, что происходит хотя бы одно из этих событий.

Например, если при бросании одной игральной кости событие A — выпало 3 очка, а событие B — выпало чётное число очков, то событие $A+B$ состоит в появлении либо 3, либо одного из чётных чисел очков (2, 4 или 6). Здесь события A и B несовместные и событию $A+B$ благоприятствуют 4 исхода. Если в опыте с бросанием одной кости событие A — выпало 2 очка, а событие B — выпало чётное число очков, то событие $A+B$ совпадает с событием B, т. е. ему благоприятствуют исходы, в которых появляется одно из чётных чисел очков (2, 4 или 6). В последнем опыте события A и B — совместные.

Рассмотрим ещё один пример. Пусть при одновременном бросании двух игральных костей событие A состоит в том, что сумма выпавших очков равна 3, а событие B — в том, что сумма выпавших очков равна 4. Тогда событие $A+B$ состоит в том, что сумма выпавших очков равна либо 3, либо 4. То есть событие $A+B$ наступает при появлении одной из пар очков: 1 и 2, 2 и 1, 1 и 3, 3 и 1, 2 и 2. Отметим, что событию A благоприятствуют 2 исхода, а событию B — 3 исхода. Общее число равновозможных элементарных исходов испытания при бросании двух игральных костей равно 36. Поэтому $P(A)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$, $P(B)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$. Событию $A+B$ благоприятствуют 5 элементарных исходов, поэтому $P(A+B)=\frac{5}{36}$, но $\frac{5}{36}=\frac{2}{36}+\frac{3}{36}=P(A)+P(B)$, т. е. $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

ТЕОРЕМА Вероятность суммы двух несовместных событий A и B равна сумме вероятностей этих событий:

$$\boldsymbol{P(A+B)=P(A)+P(B).} \qquad (1)$$

Пусть событиям A и B благоприятствуют соответственно m_1 и m_2 исходов, а всего в испытании могут произойти n равновозможных элементарных исходов. Так как A и B — несовместные события, то среди n исходов нет таких, которые одновременно благоприятствуют как событию A, так и событию B. Поэтому событию $A+B$ благоприятствует m_1+m_2 исходов. По определению вероятности $P(A)=\frac{m_1}{n}$, $P(B)=\frac{m_2}{n}$, $P(A+B)=\frac{m_1+m_2}{n}=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}=$ $=P(A)+P(B)$.

Для каждого события A можно рассматривать **противоположное** ему событие $\overline{A}$, которое наступает тогда, когда не наступает событие A.

Например, если событие A — попадание стрелком по мишени в результате одного выстрела, то противоположное ему событие $\overline{A}$ — промах в результате одного выстрела. Очевидно, что событие $A+\overline{A}$ образует достоверное событие, поэтому $P(A+\overline{A})=1$.

Применяя к событию $A+\overline{A}$ доказанную теорему, получим

$$P(A+\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})=1, \text{ т. е.}$$

$$\boldsymbol{P(A)+P(\overline{A})=\quad .} \qquad (2)$$

Задача 1. Какова вероятность того, что сумма очков, выпавших на двух игральных костях (в результате одного броска), будет не меньше 4?

► Пусть событие A — сумма выпавших на двух костях очков оказалась не меньше 4, тогда событие $\overline{A}$ — сумма выпавших очков меньше 4 (т. е. сумма равна либо 2, либо 3). Число всех возможных исходов испытания равно 36. Число пар очков, благоприятствующих событию $\overline{A}$, равно 3 (это пары 1 и 1, 1 и 2, 2 и 1). Таким образом, $P(\overline{A}) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$. Из формулы (2) имеем $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$. ◁

2. Умножение вероятностей

Предположим, что испытание состоит из двух выстрелов по мишени и событие A — попадание по мишени при первом выстреле, событие B — попадание при втором выстреле. Тогда событие, состоящее в попадании и при первом, и при втором выстрелах, называют произведением событий A и B.

! Определение. **Произведением событий A и B** (которые могут произойти в одном испытании) называется событие AB, которое состоит в том, что происходят оба этих события.

Существуют пары событий (которые могут произойти в одном испытании), наступление или не наступление каждого из которых не влияет на вероятность наступления другого. Например, в опыте с бросанием двух игральных костей появление определённого числа очков на одной кости не влияет на вероятность появления любого числа очков на другой кости. Такие события называют **независимыми событиями**.

! Для независимых событий справедливо равенство:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B). \qquad (3)$$

Чаще всего о независимости событий судят не по тому, выполняется или не выполняется равенство (3), а по тому, как поставлен опыт. Независимые события, как мы убедились выше, появляются тогда, когда опыт состоит из независящих друг от друга испытаний.

С помощью формулы (3) можно объяснить, например, почему конструкторы систем безопасности самолётов создают дублирующие системы жизненно важных узлов. Каждая такая система работает независимо от другой. И если, например, вероятность отказа одной из них равна 10^{-4}, то одновременный отказ дублирующих друг друга систем имеет вероятность, равную уже $10^{-4} \cdot 10^{-4} = 10^{-8}$. А эта вероятность для практики ничтожна.

Задача 2. Стрелок делает по мишени два выстрела. Вероятность попадания по мишени при первом выстреле равна 0,8, а при втором — 0,9. Найти вероятность того, что стрелок: 1) оба раза попадает по мишени; 2) оба раза промахнётся; 3) попадёт по мишени при первом выстреле, а при втором промахнётся; 4) попадёт по мишени при втором выстреле, а при первом промахнётся.

▶ Пусть событие A — стрелок попал по мишени при первом выстреле, событие B — попал при втором выстреле. По условию задачи $P(A) = 0,8$, $P(B) = 0,9$. Очевидно, что события A и B — независимые.

1) Пусть событие C_1 — оба раза стрелок попал по мишени, т. е. $C_1 = AB$. По формуле (3) находим вероятность события C_1.

$$P(C_1) = P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 0,8 \cdot 0,9 = 0,72.$$

2) Пусть событие C_2 — стрелок оба раза промахнулся. Требуется найти вероятность события, состоящего в одновременном наступлении событий, противоположных событиям A и B, т. е. $C_2 = \overline{A}\,\overline{B}$. События $\overline{A}$ и $\overline{B}$ — независимые. Тогда с помощью формул (3) и (2) получим

$$P(C_2) = P(\overline{A}\,\overline{B}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = (1 - P(A)) \cdot (1 - P(B)) =$$
$$= (1 - 0,8)(1 - 0,9) = 0,2 \cdot 0,1 = 0,02.$$

3) Пусть событие C_3 — стрелок попал по мишени при первом выстреле и промахнулся при втором, т. е. $C_3 = A\overline{B}$. События A и $\overline{B}$ независимые, поэтому

$$P(C_3) = P(A\overline{B}) = P(A) \cdot P(\overline{B}) = 0,8 \cdot 0,1 = 0,08.$$

4) Пусть событие C_4 — попадание по мишени при втором выстреле и промах при первом, т. е. $C_4 = \overline{A}B$. Тогда

$$P(C_4) = P(\overline{A}B) = P(\overline{A}) \cdot P(B) = 0,2 \cdot 0,9 = 0,18.$$

Ответ. 1) 0,72; 2) 0,02; 3) 0,08; 4) 0,18. ◁

В задаче 2 рассматривался случайный опыт, состоящий из двух выстрелов по мишени, всевозможными исходами которого были элементарные события C_1, C_2, C_3 и C_4. Заметим, что для этих событий

$$P(C_1) + P(C_2) + P(C_3) + P(C_4) = 0,72 + 0,02 + 0,08 + 0,18 = 1.$$

Сумма вероятностей всех элементарных событий C_1, C_2, ..., C_n, которые могут произойти в одном опыте, равна 1:

$$P(C_1) + P(C_2) + \ldots + P(C_n) = 1. \qquad (4)$$

Зная формулу (4), вероятность, например, события C_4 (после нахождения вероятностей событий C_1, C_2 и C_3) можно было найти так:

$$P(C_4) = 1 - (P(C_1) + P(C_2) + P(C_3)) =$$
$$= 1 - (0{,}72 + 0{,}02 + 0{,}08) = 1 - 0{,}82 = 0{,}18.$$

Заметим, что формула (2) является частным случаем формулы (4).

Задача 3*. Опыт состоит из трёх выстрелов по мишени, причём вероятность попадания по мишени в каждом выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что мишень будет поражена хотя бы одним из выстрелов.

▶ Пусть событие A — мишень поражена хотя бы одним выстрелом. Тогда событие $\overline{A}$ — мишень не поражена ни одним из выстрелов. Каждый выстрел представляет собой независимое испытание, в котором рассматриваются элементарные события B — попадание по мишени и $\overline{B}$ — промах. При этом $P(B) = 0{,}8$, откуда $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$. Событие $\overline{A} = \overline{B}\overline{B}\overline{B}$ и $P(\overline{A}) = P(\overline{B}\overline{B}\overline{B}) = P(\overline{B}) \cdot P(\overline{B}) \cdot P(\overline{B}) = 0{,}2^3 = 0{,}008$. Тогда $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0{,}008 = 0{,}992$. ◁

Устные вопросы и задания

1. События A и B могут произойти в одном испытании. Что называется суммой событий A и B? Привести пример суммы событий в опыте с бросанием одной игральной кости.
2. Какие события называют несовместными?
3. Брошена игральная кость. Установить, являются ли несовместными события A и B, если:
   1) A — выпало чётное число очков, B — выпало нечётное число очков;
   2) A — выпало нечётное число очков, B — выпало число очков, кратное 3.
4. Чему равна вероятность суммы двух несовместных событий?
5. Что называется произведением событий A и B, которые могут произойти в одном испытании? Привести пример произведения двух событий в опыте с бросанием двух игральных костей.
6. Какие события называют независимыми?
7. Чему равна вероятность произведения двух независимых событий?
8. Какое событие называют противоположным данному?

9. Чему равна сумма вероятностей противоположных событий?
10. Чему равна сумма вероятностей всех элементарных событий, которые могут произойти в одном испытании?

Вводные упражнения

1. Перечислить все элементарные события в опыте с бросанием одной монеты; двух монет.
2. Сколько существует элементарных событий в испытании с бросанием двух игральных костей?
3. Найти вероятность события:
1) вынут красный шар, если из коробки с 8 красными и 4 чёрными шарами один раз случайным образом извлекался один шар;
2) выпало одинаковое число очков на обеих костях в результате одного бросания двух игральных костей;
3) появился туз в результате одного изъятия одной карты из полной колоды (36 листов).

Упражнения

305. 1) Бросают одну игральную кость. Событие A — выпало 5 очков, событие B — выпало нечётное число очков. В чём состоит событие $A+B$? Найти вероятность события $A+B$.
2) В колоде 36 карт. Наугад вынимают одну карту. Событие A — вынут туз, событие B — вынут валет красной масти. В чём состоит событие $A+B$? Найти его вероятность.
3) По мишени производят два выстрела. Событие A — цель поражена при первом выстреле, B — цель поражена при втором выстреле. Записать событие, состоящее в том, что: оба выстрела попали в цель; первый выстрел попал в цель, а второй — нет; первый выстрел не попал в цель, а второй — попал; оба выстрела не попали в цель.

306. 1) Вероятность попадания стрелком по мишени равна 0,7; 0,6. Какова вероятность того, что, сделав один выстрел по мишени, стрелок промахнётся?
2) Поверхность рулетки разделена на 10 равных секторов, пронумерованных числами от 1 до 10. Найти вероятность того, что после раскручивания стрелка рулетки остановится: на секторе 5; не на секторе 5; на секторе с чётным номером; на секторе с нечётным номером; на одном из секторов 2 или 3; ни на одном из секторов 2 или 3.
3) В ящике лежат 3 красных, 4 белых и 5 чёрных шаров. Наугад вынимают один шар. Какова вероятность того, что этот шар не белый; не чёрный? Решить задачу двумя способами.
4) Бросают две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков меньше 12; не равна 3.

307. 1) Вероятность попадания стрелком по мишени при одном выстреле равна 0,8. Стрелок делает два выстрела по мишени. Найти вероятность события: A — оба выстрела поразили мишень; B — оба раза стрелок промахнулся; C — первый раз стрелок попал по мишени, а второй раз промахнулся; D — попал по мишени хотя бы одним выстрелом.

2) Бросают две игральные кости. Найти вероятность события: A — на первой кости выпало 1 очко, а на второй — кратное 3; B — на первой кости выпало либо 2, либо 3 очка, а на второй — 5 очков; C — на первой выпало 5 очков, а на второй — не 6; D — на первой выпало число очков, большее 2, а на второй — не 2 очка.

3) В коробке лежат 2 синих и 5 красных карандашей. Девочка дважды наугад вынимает по карандашу, причём после первого изъятия возвращает карандаш обратно в коробку. Найти вероятность события:

A — оба раза был вынут синий карандаш; B — оба раза вынимался красный карандаш; C — первый раз был вынут красный карандаш, а второй раз — синий; D — первый раз был вынут синий карандаш, а второй раз — красный; E — хотя бы один раз вынимался синий карандаш; F — хотя бы один раз вынимался красный карандаш.

4) Из полной колоды карт (36 листов) дважды вынимают по одной карте и всякий раз возвращают её обратно. Найти вероятность события: A — оба раза вынимался валет; B — первый раз вынули шестёрку треф, а второй раз — туза; C — первый раз вынули даму красной масти, а второй раз — короля красной масти; D — первый раз вынули карту с числом, а второй раз — туза пик.

Шаг вперёд

Испытания Бернулли

Профессор, в последней задаче параграфа сказано, что стрелок трижды стрелял по мишени и каждый раз с вероятностью 0,8 мог её поразить. До этого мы рассматривали комбинации из двух событий и их вероятности. Почему в этой задаче вероятность произведения трёх событий посчитали равной произведению вероятностей каждого из этих событий?

В случае с задачей, о которой ты говоришь, было принято на веру, что раз все три испытания (выстрела по мишени) были независимыми, то все исходы этих испытаний, как говорят в теории вероятностей, *независимы в совокупности*. А для независимых в совокупности событий A_1, A_2, ..., A_n справедливо равенство $P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n)$.

Таким образом, можно найти, например, вероятность того, что стрелок попал по мишени только при первых двух выстрелах, промахнувшись в третий раз?

Конечно. Для этого нужно найти вероятность события $AA\overline{A}$, где событие A — попал по мишени при одном выстреле, при этом $P(A) = 0{,}8$, а $P(\overline{A}) = 0{,}2$. То есть

$$P(AA\overline{A}) = P(A) \cdot P(A) \cdot P(\overline{A}) = 0{,}8^2 \cdot 0{,}2 = 0{,}128.$$


Я. Бернулли

Исследованием серий повторяющихся опытов, в каждом из которых наступает один из двух элементарных исходов: *успех* или *неудача*, занимался в XVII в. знаменитый швейцарский математик *Якоб Бернулли (1654—1705)*. Вероятность того, что опыт закончится успехом, он обозначал буквой p, а вероятность неуспеха — буквой q. При этом очевидно, что $p = 1 - q$. Эти испытания впоследствии стали называть *испытаниями Бернулли*.

В рассматриваемой нами задаче с тремя независимыми выстрелами по мишени результат опыта может закончиться одним из 8 элементарных исходов: AAA, $AA\overline{A}$, $A\overline{A}A$, $\overline{A}AA$, $A\overline{A}\overline{A}$, $\overline{A}A\overline{A}$, $\overline{A}\overline{A}A$, $\overline{A}\overline{A}\overline{A}$. Значения вероятностей этих событий для наглядности поместим в таблицу:

Событие	AAA	$AA\overline{A}$	$A\overline{A}A$	$\overline{A}AA$	$A\overline{A}\overline{A}$	$\overline{A}A\overline{A}$	$\overline{A}\overline{A}A$	$\overline{A}\overline{A}\overline{A}$
Вероятность	p^3	p^2q	p^2q	p^2q	pq^2	pq^2	pq^2	q^3

Аналогичные таблицы можно составить для элементарных исходов в сериях из 4, 5 и более испытаний Бернулли. Число элементарных исходов в серии из 4 испытаний будет $2^4 = 16$, в серии из 5 испытаний — $2^5 = 32$ и т. д.

Пользуясь составленной нами таблицей решите самостоятельно следующие задачи.

1. Стрелок трижды стреляет по мишени. Вероятность попадания по мишени при каждом выстреле постоянна и равна 0,9. Найти вероятность того, что мишень будет поражена ровно двумя выстрелами. (Ответ. 0,243.)

2. Устройство, состоящее из трёх независимо работающих элементов, включают на определённое время. Вероятность отказа каждого из этих элементов за это время равна 0,2. Найти вероятность отказа за обозначенное время: 1) всех трёх элементов; 2) ровно двух элементов; 3) ровно одного элемента. (Ответ. 1) 0,008; 2) 0,096; 3) 0,384.)

Составьте таблицу вероятностей элементарных исходов в опыте, состоящем из четырёх испытаний Бернулли, и решите следующие задачи.

3. Будем считать, что вероятности рождения у каждой мамы мальчика и девочки одинаковы, т. е. равны $\frac{1}{2}$. Найти вероятность того, что в семье, планирующей 4 детей, родятся: 1) 4 девочки; 2) 1 девочка и 3 мальчика; 3) 2 девочки и 2 мальчика. (Ответ. 1) $\frac{1}{16}$; 2) $\frac{1}{4}$; 3) $\frac{3}{8}$.)

4. Начинающий игрок в шахматы выигрывает партию у любого из своих друзей с вероятностью $\frac{1}{4}$. Какова вероятность того, что, сыграв 4 партии, этот игрок выиграет: 1) ровно одну партию; 2) ровно 2 партии; 3) ровно 3 партии? (Ответ. 1) $\frac{27}{64}$; 2) $\frac{27}{108}$; 3) $\frac{3}{64}$.)

§ 20 Относительная частота и закон больших чисел

С помощью введённого нами определения вероятности события можно, не производя реальных испытаний, вычислить значение вероятности события, если известны числа всех благоприятствующих и всех равновозможных исходов испытания. На практике существует множество событий, найти вероятность которых с помощью этого определения не удаётся. В этом параграфе вы познакомитесь с другим способом нахождения вероятности события — статистическим способом.

Нужно вспомнить:

- понятия испытания и исхода испытания;
- определение вероятности события;
- построение точек с заданными координатами на координатной плоскости;
- вычисления с помощью микрокалькулятора;
- правило округления чисел;
- запись чисел с заданной степенью точности.

Определение вероятности, сформулированное в § 17, называется **классическим определением вероятности.** Классическое определение не требует, чтобы испытание проводилось в действительности: теоретическим способом (если это возможно) определяются все равновозможные и благоприятствующие событию исходы.

Такое определение предполагает, что число элементарных равновозможных исходов испытания конечно и выражается конкретным числом. Однако на практике — при изучении случайных явлений в естествознании, экономике, медицине, производстве — часто встречаются испытания, у которых число возможных исходов необозримо велико. А в ряде случаев до проведения реальных испытаний трудно или невозможно установить равновозможность исходов испытания. Например, до многократного подбрасывания кнопки трудно представить, равновозможны ли её падения «на плоскость» и «на острие». Поэтому, наряду с классическим, на практике используют и так называемое **статистическое определение вероятности.** Для знакомства с ним требуется ввести понятие **относительной частоты.**

! О п р е д е л е н и е. **Относительной частотой** события A в данной серии испытаний называют отношение числа испытаний M, в которых это событие произошло, к числу всех проведённых испытаний N. При этом число M называют **частотой** события A.

Относительную частоту события A обозначают $W(A)$. Тогда по определению

$$W(A) = \frac{M}{N}. \qquad (1)$$

Задача 1. Во время тренировки в стрельбе по цели было сделано 30 выстрелов и зарегистрировано 26 попаданий. Какова относительная частота попадания по цели в данной серии выстрелов?

▶ Событие A — «попадание по цели» произошло в 26 случаях, т. е. $M = 26$. Общее число испытаний $N = 30$, поэтому

$$W(A) = \frac{26}{30} = \frac{13}{15}. \ \triangleleft$$

Исследование. Два друга проводили испытания (опыты) с подбрасыванием монеты и *наблюдали за появлением орла*. Один из мальчиков подбрасывал монету и сообщал о том, что выпало — орёл (О) или решка (Р). Второй мальчик вносил результаты испытаний во второй столбец таблицы:

N	О или Р	M	$W = \frac{M}{N}$	N	О или Р	M	$W = \frac{M}{N}$
1	О	1	1	26	О	13	0,5
2	О	2	1	27	Р	13	0,4815
3	Р	2	0,6667	28	О	14	0,5
4	О	3	0,75	29	О	15	0,5172
5	Р	3	0,6	30	Р	15	0,5
6	О	4	0,6667	31	Р	15	0,4839
7	Р	4	0,5714	32	О	16	0,5
8	Р	4	0,5	33	Р	16	0,4848
9	О	5	0,5556	34	О	17	0,5
10	Р	5	0,5	35	О	18	0,5143
11	Р	5	0,4545	36	Р	18	0,5
12	Р	5	0,4167	37	О	19	0,5135
13	О	6	0,4615	38	О	20	0,5263
14	Р	6	0,4286	39	Р	20	0,5128
15	Р	6	0,4	40	О	21	0,525
16	О	7	0,4375	41	Р	21	0,5122
17	О	8	0,4706	42	Р	21	0,5
18	Р	8	0,4444	43	О	22	0,5116
19	О	9	0,4737	44	Р	22	0,5
20	Р	9	0,45	45	Р	22	0,4889
21	О	10	0,4762	46	О	23	0,5
22	Р	10	0,4545	47	Р	23	0,4894
23	О	11	0,4783	48	О	24	0,5
24	Р	11	0,4583	49	О	25	0,5102
25	О	12	0,48	50	Р	25	0,5

После пятидесяти подбрасываний в третьем столбце таблицы друзья записали результаты «накопления» частоты M появления орла, а в четвёртом — подсчёт с помощью микрокалькулятора для каждого значения N (числа испытаний) относительной частоты $\frac{M}{N}$ (с точностью до одной десятитысячной).

После этой работы мальчики на рисунке 38 отметили точками результаты математической обработки проведённых испытаний. Один из друзей, глядя на рисунок, сказал, что он похож на график затухающих колебаний.

Придя в класс, друзья предложили всем 20 одноклассникам проделать аналогичные опыты с подбрасыванием монеты: каждый ученик бросал монету 50 раз и считал появление орла. После этого друзья составили сводную таблицу результатов испытаний, суммируя в первом столбце число N проводимых учащимися испытаний, во втором — количество появлений орла M и находя в третьем столбце для каждой серии испытаний относительные частоты события W.

Друзья заметили, что после значительного числа испытаний относительная частота появления орла всё меньше отличается от 0,5, т. е. от величины вероятности этого события в классическом понимании.

Под **статистической вероятностью** понимают число, около которого колеблется относительная частота события при большом числе испытаний.

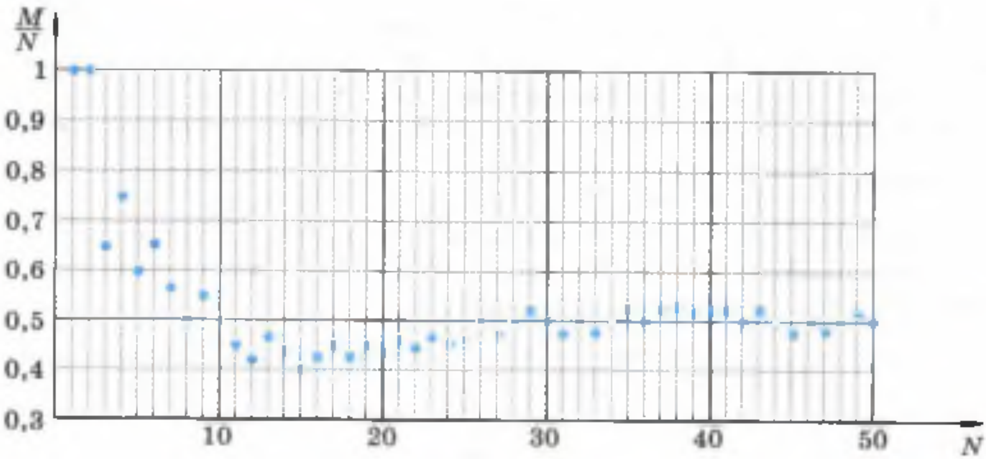


Рис. 38

N	M	$W = \frac{M}{N}$	N	M	$W = \frac{M}{N}$
50	25	0,5	550	276	0,5018
100	48	0,48	600	302	0,5033
150	74	0,4933	650	328	0,5046
200	101	0,505	700	347	0,4957
250	126	0,504	750	372	0,496
300	145	0,4833	800	398	0,4975
350	169	0,4829	850	427	0,5024
400	196	0,49	900	448	0,4978
450	222	0,4933	950	477	0,5021
500	253	0,506	1000	502	0,502

Описанный в исследовании факт подтверждают и дошедшие до нас исторические сведения.

Известно, что в XVIII в. французский естествоиспытатель *Жорж Луи Леклерк де Бюффон (1707—1788)* провёл 4040 испытаний с подбрасыванием монеты. В результате чего наблюдал появление орла 2048 раз. Таким образом, Бюффон получил относительную частоту появления орла, равную $\frac{2048}{4040} \approx 0{,}5069$. В начале XX в. английский учёный *Карл Пирсон (1857—1936)* провёл с помощью своих учеников 24 000 аналогичных испытаний и наблюдал 12 012 появлений орла. Относительная частота события у Пирсона оказалась равной $\frac{12\,012}{24\,000} = 0{,}5005$.

В связи с этим и ему подобными явлениями швейцарский математик Якоб Бернулли обосновал так называемый **закон больших чисел**:

> Можно считать достоверным тот факт, что при большом числе испытаний относительная частота события $W(A)$ практически не отличается от его вероятности $P(A)$, т. е.
>
> $$P(A) \approx W(A)$$
>
> при большом числе испытаний.

Задача 2. Родильный дом некоторого города вёл по годам подсчёт рождения мальчиков и девочек. Результаты заносились в таблицу.

Год	Число родившихся детей	
	Девочки	Мальчики
1998	802	823
1999	629	665
2000	714	769
2001	756	798
2002	783	811

Найти относительную частоту рождения мальчиков за рассматриваемый период.

▶ Число родившихся мальчиков: $M = 823 + 665 + 769 + 798 + 811 = 3866$. Число родившихся девочек: $802 + 629 + 714 + 756 + 783 = 3684$. Общее число родившихся детей $N = 3866 + 3684 = 7550$. Относительная частота появления в рассматриваемом родильном доме мальчиков равна

$$W = \frac{M}{N} = \frac{3866}{7550} \approx 0{,}5121. \triangleleft$$

Отметим, что всемирные наблюдения за рождением детей показывают, что мальчиков на Земле рождается всегда чуть больше, чем девочек.

Устные вопросы и задания

1. В каких случаях не удаётся найти вероятность события с помощью классического определения вероятности?
2. Что называют относительной частотой события A, происходящего в определённой серии испытаний?
3. Как найти относительную частоту события A?
4. Что понимают под статистической вероятностью события?
5. Сформулировать закон больших чисел.
6. Около какого числа колеблется относительная частота события: A — выпал орёл при большом числе испытаний с бросанием одной монеты; B — выпало 3 очка при большом числе испытаний с бросанием одной игральной кости?

Вводные упражнения

1. В коробке лежат 7 чёрных и 3 белых шара. Случайным образом вынимают 2 шара. Найти вероятность события: вынуты оба шара чёрного цвета; вынуты два белых шара; вынуты шары разных цветов.
2. На координатной плоскости отметить точки $A\,(-5;\,3)$; $B\,(0;\,4)$; $C\,(1{,}5;\,4)$; $D\,(-2;\,0)$.
3. Округлить до сотых число: 0,345; 2,7409; 8,997; 5; 0,293.

4. Представить число $6\frac{2}{7}$ в виде десятичной дроби с точностью до 0,001.
5. В классе 15 девочек и 12 мальчиков. Какую часть от всех учащихся класса составляют мальчики?

Упражнения

308. Заполнить последний столбец таблицы:

№ п/п	Испытание	Число испытаний (N)	Событие A	Частота события A (M)	Относительная частота события A $\left(W(A)=\frac{M}{N}\right)$
1	Бросается монета	100	Выпала решка	52	
2	Спортсмен стреляет по мишени	100	Попадание по мишени	90	
3	Бросается игральная кость	500	Выпало 5 очков	84	

309. Новый препарат давался 1000 пациентам, больным одной и той же болезнью. По истечении курса лечения 952 пациента исцелились. Какова относительная частота исцеления в рассмотренном исследовании?

310. В изготовленной партии из 10 000 болтов обнаружено 250 бракованных болтов. Найти относительную частоту появления в данной партии бракованного болта. Выразить результат в процентах.

311. Проводилась серия испытаний с подбрасыванием гайки (рис. 39). Результаты заносились в таблицу:

Число испытаний (N)	10	50	100	250	500	1000
Частота падения гайки плашмя (M)	7	33	67	155	316	627
Относительная частота падения гайки плашмя (W)						

упала на грань *упала плашмя*

Рис. 39

упал на большой круг *упал на бок* *упал на малый круг*

Рис. 40

Заполнить последнюю строку таблицы. Высказать предположение о значении вероятности P — падения гайки плашмя (с точностью до одной десятой).

312. Результаты испытаний с подбрасыванием напёрстка (рис. 40) заносились в таблицу:

Число испытаний (N)	100	200	500	1000
Частота падения на бок (M_1)	83	169	421	839
Частота падения на большой круг (M_2)	15	28	72	141
Относительная частота падения на бок (W_1)				
Относительная частота падения на большой круг (W_2)				

Заполнить две последние строки таблицы. Высказать предположение о значении вероятности падения напёрстка на бок (P_1) и на большой круг (P_2) с точностью до одной сотой.

313. (Исследование.) Результаты подбрасывания 100 раз ($N = 100$) игральной кости занести в таблицу.

Исходы испытания	1 очко	2 очка	3 очка	4 очка	5 очков	6 очков
Подсчёт случаев						
Частота (M)						
Относительная частота $\left(W = \frac{M}{100}\right)$						

Подсчёт случаев удобно проводить следующим образом: после каждого броска кубика в соответствующую выпавшему числу очков клетку таблицы ставится знак «|». После накопления четырёх вертикальных знаков пятый проводится горизонтально: «卌». После этого подсчёт частот существенно упрощается. Например, если в клетке подсчёта случаев стоят знаки «卌 卌 卌 ||», то, очевидно, под ней, в клетке частоты, следует записать число 17 (получаемое как $5 \cdot 3 + 2$).
Объединив результаты исследований нескольких (k) учеников, составить сводную таблицу частот и относительных частот (для $N = 100k$ испытаний). Убедиться в том, что с увеличением числа испытаний относительная частота появления 1 очка, 2 очков, ..., 6 очков всё меньше отличается от вероятности каждого из этих событий $P = \frac{1}{6}$.

Это интересно

Подсчёт рыб в пруду

Вот интересная задача, в ней нет никаких числовых данных, а способ решения вы должны изобрести сами. Как приближённо подсчитать число рыб в конкретном пруду?

На первый взгляд кажется, что решить эту задачу невозможно. Но какое прикладное значение она может иметь?

Решение этой задачи имеет большое значение. Например, это важно для владельца рыбного хозяйства, который запустил в пруд рыб для размножения и дальнейшего отлова. При этом он знает, что если их число будет ниже критического, то популяция погибнет, а если будет выше определённого, то рыбам не будет хватать корма и пространства.

А что конкретно мы (или хозяин пруда) можем сделать? Можем, например, ловить рыбу?

Да, можете отловить сетью или сачком столько рыб, сколько вам захочется. Подскажу ещё: можете даже каждую рыбину как-то пометить.

Тогда всё понятно. Допустим в пруду x рыб. Отловим m рыб, пометим каждую и выпустим обратно в пруд. Через несколько дней они равномерно распределятся среди своих «немеченых» собратьев. Тогда мы ещё раз выловим, допустим, n рыб и подсчитаем, сколько среди них окажется меченых. Допустим, меченых рыб среди них оказалось k (очевидно, что $k < n$ и $m < x$).

Пусть в последнем испытании событие A — выловлена меченая рыба, тогда $W(A) = \frac{k}{n}$. Но если в пруду среди x рыб было всего m меченых, то $P(A) = \frac{m}{x}$. Если рыб в пруду много и отлавливали мы немало, то $W(A) \approx P(A)$ или $\frac{k}{n} \approx \frac{m}{x}$, откуда $x \approx \frac{mn}{k}$.

Мне очень понравилась эта задача. Задайте нам, пожалуйста, ещё какую-нибудь задачу, в которой также самим нужно изобрести способ решения.

Попробуйте решить такую задачу: «В коробке находится большое количество шаров, одинаковых на ощупь. Известно также, что в коробке нет красных шаров. Как, не заглядывая в коробку, оценить примерное количество шаров в ней?»

А вынимать шары из коробки можно?

Можно вынимать из коробки желаемое для тебя количество шаров (только не все). Можно добавлять в коробку любое количество шаров...

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ IV

314. В коробке находятся 3 чёрных, 4 красных и 5 синих карандашей. Наугад вынимается один карандаш. Найти вероятность того, что вынутый карандаш: 1) чёрный; 2) красный; 3) синий; 4) не чёрный; 5) не красный; 6) не синий; 7) зелёный; 8) или чёрный, или красный, или синий.

315. Наугад называется натуральное число от 1 до 30. Какова вероятность того, что это число: 1) 6; 2) не 6; 3) кратно 6; 4) кратно 5; 5) простое число; 6) не меньше 27?

316. Витя забыл две последние цифры номера телефона приятеля и набрал их наугад. С какой вероятностью этот звонок попадёт к приятелю?

317. На стол бросаются монета и игральная кость. Какова вероятность того, что: 1) на монете появится орёл, а на кости — 2 очка; 2) на монете появится решка, а на кости — нечётное число очков?

318. Брошены две игральные кости — белая и чёрная. Какова вероятность того, что: 1) на белой кости выпало чётное число очков, а на чёрной — нечётное; 2) появятся 2 и 3 очка; 3) появятся два чётных числа очков; 4) появятся чётное и нечётное число очков?

319. Из колоды карт (36 листов) наугад вынимается одна карта. Какова вероятность того, что эта карта: 1) валет; 2) король чёрной масти; 3) с чётным числом красной масти; 4) не с числом?

320. Брошены 3 монеты: копейка, пятак и гривенник. Какова вероятность того, что: 1) на копейке появится орёл, а на пятаке и гривеннике — решки; 2) на всех монетах выпадут решки?

321. В ящике находятся 3 белых и 2 чёрных шара. Наугад вынимаются 2 шара. Какова вероятность того, что вынуты: 1) 2 белых шара; 2) 2 чёрных шара; 3) чёрный и белый шары; 4) шары одного цвета?

322. Брошены две игральные кости. Какова вероятность того, что: 1) хотя бы на одной кости появятся 3 очка; 2) хотя бы на одной кости появится чётное число очков?

ПРАКТИЧЕСКИЕ И ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ

1. Ученик отвечает на каждый из 6 вопросов теста словом «да» или «нет». Какова вероятность того, что все ответы, данные наугад, окажутся правильными?
2. Ученик выбирает в каждом задании теста один из четырёх предложенных ответов (только один из которых верный). Какова вероятность того, что выбирая наугад по одному ответу в каждом из 5 заданий теста, ученик выберет: 1) все верные ответы; 2) 4 из 5 верных ответов?
3. *(Опыт Бюффона.)* На листе бумаги начертите параллельные линии, расстояние между которыми равны длине иглы (рис. 41). Бросайте 100 раз на этот лист иглу и считайте случаи её пересечения с любой из линий. Найдите относительную частоту W события «игла пересекла одну из линий» в серии из 100 испытаний. Сделайте предположение о вероятности этого события.

Рис. 41

4. В турнире участвуют 8 игроков. Номер, вытаскиваемый игроком наугад, определяет его положение в турнирной сетке (рис. 42). Будем считать, что лучший игрок всегда побеждает второго по мастерству, который (в свою очередь) побеждает всех остальных.

Рис. 42

Проигрывающий в финале занимает второе место. Какова вероятность того, что это место займёт второй по мастерству игрок?

5. Многие двери подъездов в многоквартирных домах оборудованы кодовыми замками. Дверь откроется, если в нужной последовательности будут верно нажаты: 1) три; 2) четыре из десяти кнопок с цифрами (одна и та же цифра-кнопка в коде может повторяться). Какова вероятность того, что наугад набранный один раз код откроет дверь?

6. Студент колледжа, которому предстоит сдавать зачёт, знает верные ответы на 50 вопросов из 70 выносимых на проверку. Какова вероятность того, что, вынув случайным образом 2 билета (на каждом из которых записано по одному вопросу), студент ответит на оба верно?
7. В некотором городе проживают около 5 млн жителей. Сколько примерно жителей в этом городе родились: 1) 8 марта; 2) 29 февраля?
8. Игральную кость бросали: 1) 2 раза; 2) 10 раз. Каждый раз выпадало 6 очков. Есть ли основания предполагать, что кость «неправильная» (центр тяжести смещён из геометрического центра в данном случае к грани, противоположной той, на которой отмечены 6 очков)?
9. Собираясь на дискотеку, Таня вынула из шкафа 5 блузок, каждая из которых висела на своих «плечиках». Померив их, Таня повесила их в случайном порядке обратно в шкаф. Какова вероятность того, что блузки оказались повешенными в первоначальном порядке?

В этой главе вы узнали,

что такое:

— испытание, опыт; исход испытания; событие;
— невозможные, достоверные и случайные события;
— совместные и несовместные события;
— равновозможные события;
— независимые события;
— элементарные события;
— благоприятствующий исход испытания;
— вероятность события в классическом понимании; в статистическом понимании;
— сумма и произведение двух событий;
— противоположное событие;
— испытания Бернулли;
— относительная частота события;
— закон больших чисел;

как:

— находить все элементарные исходы испытаний с бросанием монет, игральных костей и т. п.;
— находить вероятность события в опыте с очевидными равновозможными элементарными исходами;
— применять знания комбинаторики (в том числе — правило произведения) для вычисления вероятности события;
— находить вероятность суммы двух несовместных событий;
— находить вероятность произведения двух независимых событий;
— находить вероятность события в испытаниях Бернулли;
— проводить реальные практические испытания для нахождения относительной частоты события;
— фиксировать и подсчитывать благоприятствующие исходы испытания;
— находить относительную частоту события в серии однотипных испытаний;
— оценивать вероятность события в опытах с неравновозможными элементарными исходами.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

I уровень

1. В коробке находятся 2 белых, 3 чёрных и 5 красных шаров. Наугад вынимается один шар. Найти вероятность того, что вынутый шар:
а) белый; б) чёрный; в) не красный; г) или чёрный или красный.

I уровень

2. На стол бросают две игральные кости. Какова вероятность того, что на первой кости выпало 3 очка, а на второй — число очков, большее чем 4?
3. Два стрелка одновременно стреляют по мишени. Вероятность попадания по мишени у первого стрелка равна 0,6, у второго — 0,7. Какова вероятность того, что первый стрелок попадёт по мишени, а второй при этом промахнётся?

II уровень

4. В коробке лежат 5 чёрных и 2 красных шара. Наугад вынимают 2 шара. Найти вероятность того, что вынуты:
а) два чёрных шара; б) два красных шара; в) шары разных цветов.
5. На стол бросают две игральные кости. Какова вероятность того, что:
а) на первой кости выпало чётное число очков, а на второй — не меньшее, чем 3; б) хотя бы на одной кости появилось 6 очков?
6. Стрелок делает 3 выстрела по мишени. Вероятность попадания по мишени при каждом выстреле равна 0,6. Какова вероятность того, что мишень будет поражена ровно одним выстрелом?

III уровень

7. В коробке лежат 1 белый, 4 чёрных и 5 красных шаров. Наугад вынимают два шара. Найти вероятность того, что:
а) среди вынутых шаров нет белого; б) один шар чёрный, а другой — нечёрный.
8. На стол бросают три игральные кости. Какова вероятность того, что:
а) на первой кости выпало 5 очков, на второй — больше, чем 4, на третьей — нечётное число очков; б) хотя бы на одной выпало чётное число очков.
9. Стрелок делает по мишени 3 выстрела. Вероятность попадания по мишени при каждом выстреле равна 0,7. Какова вероятность того, что мишень будет поражена или одним, или двумя выстрелами?

ТЕМЫ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ РАБОТ

1. История игр в кости (начиная с XX в. до н. э.). Игры в кости в разных странах.
2. Первые задачи теории вероятностей в трудах Л. Пачоли, Д. Кардано, Б. Паскаля.
3. Переписка Б. Паскаля и П. Ферма об измерении доли успеха в азартных играх.
4. Книга Х. Гюйгенса «О расчётах в азартной игре» — первая книга по теории вероятностей.
5. Типичные ошибки при решении вероятностных задач.
6. Маловероятные события в реальном мире.
7. Представление о геометрической вероятности.
8. Справедливые и несправедливые игры.
9. Таблица случайных чисел. Компьютерные датчики случайных чисел. Моделирование случайных опытов с помощью таблицы случайных чисел.
10. Связь числа исходов в испытаниях Бернулли с треугольником Паскаля.

ГЛАВА V

Случайные величины

Вы познакомились с различными видами событий, научились находить вероятности случайных событий с помощью классического и статистического определений вероятности. В теории вероятностей, помимо случайных событий, одним из важнейших понятий является понятие *случайной величины*. Рассмотрев следующие примеры, вы поймёте, что с этим понятием вы уже знакомы.

Например, один и тот же товар в разных магазинах чаще всего продаётся по разным ценам (зависящим от дальности магазина до оптового склада или до производителя, от стоимости аренды помещения, от рейтинга магазина и т. д.). Цена этого товара для покупателя, исследующего в разных магазинах его стоимость, — случайная величина.

Наблюдения за многократной стрельбой орудия по одной и той же цели показывают, что расстояние от места падения (или разрыва) снаряда до самого орудия принимает хотя и близкие друг другу, но всё же разные случайные значения. Это расстояние — случайная величина.

Число людей, заходящих на один и тот же сайт в Интернет, в разные дни бывает различным. Число таких людей является случайной величиной.

Все эти примеры описывают разные ситуации, имеющие общие черты: в каждой из них речь идёт о случайной величине, характеризующей некоторое случайное событие. Эта величина может принимать различные числовые значения. Примеров случайных величин множество, при этом каждая из них имеет свою размерность. Например, рост произвольно выбранного ученика в классе измеряется в *сантиметрах*; число бракованных деталей в контрольной партии измеряется в *штуках*; сумма очков, появившаяся в результате одного бросания двух игральных костей, измеряется в *очках*; количество израсходованной за сутки воды в конкретной квартире измеряется в *метрах кубических* и т. п.

Изучением закономерностей в появлении и распределении значений случайной величины учёные стали заниматься после того, как теория вероятностей в XVII в.

оформилась в самостоятельный раздел математики. До этого отдельные исследователи собирали различные статистические данные (в основном — в демографии) и пытались делать на их основе некоторые прогнозы.

Область теории вероятностей, занимающаяся изучением случайных величин, называется *математической статистикой*. В этой главе вы познакомитесь с основными понятиями математической статистики и узнаете способы описания окружающего нас мира с помощью числовых характеристик.

§ 21 Таблицы распределения

Сумма выпавших очков при бросании двух игральных костей — случайная величина, принимающая значения всех натуральных чисел от 2 до 12. Как удобнее всего изучить закономерности в появлении той или иной суммы очков? Очевидно, когда значения этих сумм и вероятности их появления представлены обозримо. В этом параграфе вы познакомитесь с наглядным способом представления (с помощью таблицы) распределения значений случайной величины по вероятностям, по частотам и по относительным частотам. Познакомитесь с примерами различных случайных величин. Убедитесь в применимости закона больших чисел для решения прикладных задач, связанных с частотным распределением значений случайной величины.

Нужно вспомнить:

- понятие вероятности события;
- понятия частоты и относительной частоты события в данной серии испытаний;
- свойство суммы вероятностей всех элементарных исходов испытания;
- закон больших чисел.

Задача 1. Брошены две игральные кости. Игроки делают ставки на выпавшую сумму очков на двух костях. Есть ли сумма, на которую выгодно делать ставку?

▶ Найдём вероятность появления каждой суммы очков. Общее число исходов n — всевозможных пар очков, согласно правилу произведения равно $6 \cdot 6 = 36$. Составим таблицу сумм очков, выпавших на двух костях:

1-я кость	2-я кость					
	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	**7**
2	3	4	5	6	**7**	8
3	4	5	6	**7**	8	9
4	5	6	**7**	8	9	10
5	6	**7**	8	9	10	11
6	**7**	8	9	10	11	12

С помощью таблицы для каждой конкретной суммы s определим число благоприятствующих ей исходов m_s:

$$m_2 = m_{12} = 1,\ \ m_3 = m_{11} = 2,\ \ m_4 = m_{10} = 3,$$
$$m_5 = m_9 = 4,\ \ m_6 = m_8 = 5,\ \ m_7 = 6.$$

Вероятность появления той или иной суммы в результате бросания двух костей можно представить в виде следующей таблицы:

Сумма очков	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Вероятность $\left(P = \frac{m}{n}\right)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Наибольшую вероятность появления $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ имеет сумма очков, равная 7.

Ответ. Такая сумма есть, она равна 7 очкам. ◁

В задаче появляющаяся при бросании костей сумма очков — **случайная величина**. Обозначим её X. Тогда $X_1 = 2$, $X_2 = 3$, …, $X_{10} = 11$, $X_{11} = 12$ — значения случайной величины X. Соответствующие каждому значению X вероятности их появления P_1, P_2, …, P_{10}, P_{11} указаны в таблице:

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

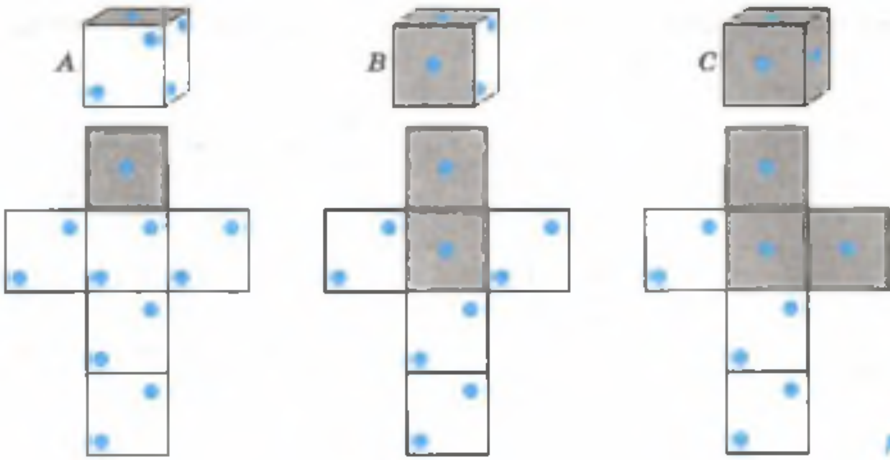


Рис. 43

С помощью этой таблицы легко увидеть, например, какие значения величина X принимает с одинаковыми вероятностями; какое значение величины X появляется с большей вероятностью и т. д.

Существуют случайные величины, принимающие одинаковые значения, но с разными вероятностями. Рассмотрим, например, 3 игральных кубика, на гранях которых отмечены только одно или два очка: у кубика A одно очко встречается на гранях один раз, у кубика B — 2 раза, а у кубика C — 3 раза, на остальных гранях отмечены по два очка (рис. 43).

Случайные величины X, Y и Z — числа очков, выпавшие после бросания на кубиках A, B и C соответственно, принимают одинаковые значения: $X_1 = Y_1 = Z_1 = 1$, $X_2 = Y_2 = Z_2 = 2$. Вероятности же появления этих чисел на каждом из рассмотренных кубиков различны (см. таблицы).

X	1	2
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$

кубик A

Y	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

кубик B

Z	1	2
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

кубик C

Эти и подобные им таблицы называют **таблицами распределения значений случайной величины по их вероятностям**. Они составлены после **теоретического** расчёта вероятностей событий.

Рассмотрим примеры случайных величин, для которых невозможно записать распределение их значений по вероятностям, исходя только из теоретических соображений.

Пример 1. Падение некоторой кнопки «на острие» или «на плоскость» может быть рассмотрено как случайная величина R с условными значениями $R_1 = 0$ (падение «на острие») и $R_2 = 1$ (падение «на плоскость»).

В отличие от примеров с бросанием игральных кубиков, распределение значений величины R по вероятностям не может быть найдено теоретически. Записать его можно с помощью относительной частоты после проведения серии опытов. Для некоторой конкретной кнопки распределение значений случайной величины R по относительным частотам представлено с помощью таблицы:

R	0	1
W	0,55	0,45

Пример 2. Случайная величина X — оценка за контрольную работу учащихся конкретного 9 класса может принимать значения $X_1 = 1$, $X_2 = 2$, $X_3 = 3$, $X_4 = 4$, $X_5 = 5$. Распределение величины X по частотам (или относительным частотам) можно записать после подсчёта числа случаев появления каждого её значения.

Задача 2. После проверки контрольной работы в 9 классе учитель сделал подсчёт числа случаев (M) получения каждой из оценок и составил таблицу распределения значений величины X (оценок учащихся) по частотам M.

X	1	2	3	4	5
Подсчёт случаев	|	|||	卌 卌 卌	卌 ||||	|||
M	1	3	15	9	3

Составить таблицу распределения значений величины X по относительным частотам.

▶ Число учащихся 9 класса N, писавших контрольную работу, равно сумме частот (M) всех выставленных оценок, т. е. $N = 1 + 3 + 15 + 9 + 3 = 31$.

Зная, что относительная частота находится по формуле $W = \frac{M}{N}$, найдём относительную частоту для каждого значения величины X: $W_1 = \frac{1}{31}$, $W_2 = \frac{3}{31}$, $W_3 = \frac{15}{31}$, $W_4 = \frac{9}{31}$, $W_5 = \frac{3}{31}$.

Ответ.

X	1	2	3	4	5
W	$\frac{1}{31}$	$\frac{3}{31}$	$\frac{15}{31}$	$\frac{9}{31}$	$\frac{3}{31}$

Когда нужно находить сумму всех значений некоторой величины, используют знак Σ, введённый Л. Эйлером. Например, если частота M принимает значения M_1, M_2, ..., M_k, то будем использовать обозначение

$$M_1 + M_2 + \ldots + M_k = \Sigma M.$$

Зная, что сумма всех частот случайной величины равна числу испытаний N, можно записать

$$\Sigma M = N.$$

Для любой случайной величины сумма относительных частот всех её значений равна 1.

$$\Sigma W = \Sigma\left(\frac{M}{N}\right) = \frac{M_1}{N} + \frac{M_2}{N} + \ldots + \frac{M_k}{N} = \frac{M_1 + M_2 + \ldots + M_k}{N} = \frac{\Sigma M}{N} = \frac{N}{N} = 1.$$

Например, в задаче 2

$$\Sigma W = \frac{1}{31} + \frac{3}{31} + \frac{15}{31} + \frac{9}{31} + \frac{3}{31} = 1.$$

Задача 3. Рост каждой из 50 гимнасток одного спортивного клуба занесён в таблицу:

148	148	148	149	149	149	149	149	149	149
149	150	150	150	150	150	150	150	150	150
150	151	151	151	151	151	151	151	151	152
152	152	152	152	152	152	152	152	153	153
153	153	153	153	153	154	154	154	154	154

По имеющимся данным составить таблицу распределения значений случайной величины X — роста гимнасток клуба: 1) по частотам (M); 2) по относительным частотам (W).

Величина X принимает значения $X_1 = 148$, $X_2 = 149$, ..., $X_7 = 154$. Подсчитывая число (M) гимнасток каждого роста, заносим данные в частотную таблицу, а затем для каждого значения X находим значение относительной частоты W, зная, что $N = 50$.

X	148	149	150	151	152	153	154
M	3	8	10	8	9	7	5
$W=\frac{M}{N}$	$\frac{3}{50}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{9}{50}$	$\frac{7}{50}$	$\frac{1}{10}$

Проверка: $\sum M = 3+8+10+8+9+7+5=50=N;\ \sum W = 1.$ ◁

Устные вопросы и задания

1. Привести примеры случайных величин.
2. Как строится таблица распределения значений случайной величины по вероятностям; частотам; относительным частотам?
3. С какой целью используется знак $\sum$? Кто его ввёл в математическую символику?
4. Что обозначает запись: $\sum M = N;\ \sum W = 1$?

Вводные упражнения

1. Брошена одна игральная кость. Найти вероятность события: A — выпало 3 очка; B — выпало не меньше 3 очков; C — выпало число очков, кратное 3.
2. Брошены две игральные кости. Найти вероятность события: A — на костях появились одинаковые очки; B — появились 1 и 6 очков; C — сумма выпавших очков равна 3; D — сумма выпавших очков не меньше 11.
3. В литературном тексте объёмом 1000 знаков буква *м* встретилась 29 раз. Высказать предположение о числе букв *м* в литературном тексте объёмом 10 000 знаков; 100 000 знаков.

Упражнения

323. Составить таблицу распределения по вероятностям P значений случайной величины X — числа очков, появившихся при бросании:

1) обыкновенного игрального кубика;

2) кубика, на двух гранях которого отмечено 1 очко, на двух гранях — 2 очка, на двух гранях — 3 очка;

3) кубика, на трёх гранях которого отмечено 1 очко, на двух — 2 очка, на одной грани — 3 очка;

4) кубика, на двух гранях которого отмечено 1 очко, на трёх — 2 очка, на одной — 3 очка.

324. На стол бросают две монеты. Исходу «орёл» припишем условное числовое значение 0, а исходу «решка» — 1. Составить таблицу распределения по вероятностям P значений случайной величины X — суммы выпавших на монетах чисел.

325. На стол одновременно бросают два игральных тетраэдра, грани каждого из которых пронумерованы числами 1, 2, 3 и 4. Составить таблицу распределения по вероятностям значений случайной величины X — суммы очков на гранях тетраэдров, касающихся поверхности стола.

326. На стол одновременно бросают игральный кубик и игральный тетраэдр (грани которого пронумерованы числами 1, 2, 3 и 4). Составить таблицу распределения по вероятностям значений случайной величины X — суммы очков, выпавших на кубике и на грани тетраэдра, касающейся поверхности стола.

327. Составить таблицу распределения по частотам M, значений случайной величины X — цифр, встречающихся на ценниках товаров в некотором киоске:

73, 102, 225, 30, 44, 68, 76, 5, 90, 119,
86, 24, 37, 207, 8, 45, 51, 13, 201, 69.

328. В таблице записаны размеры обуви 20 девочек 9 класса:

34	35	35	35	36	36	36	36	37	37
37	37	37	37	38	38	38	39	39	40

На основании этих данных составить таблицы распределения по частотам (M) и относительным частотам (W) значений случайной величины X — размеров обуви девочек 9 класса.

329. В таблице приведены размеры одежды 50 учащихся 9 класса:

50	40	44	44	46	46	44	48	46	44
38	44	48	50	40	42	50	46	54	44
42	42	52	44	46	38	46	42	44	48
46	48	44	40	52	44	48	50	46	46
48	40	46	42	44	50	46	44	46	48

На основании этих данных составить таблицы распределения по частотам и относительным частотам значений случайной величины X — размеров одежды учащихся 9 класса.

330. Рассматривая произвольную страницу текста на русском языке из какого-либо произведения русского писателя, составить таблицы распределения по частотам и по относительным частотам (с точностью до 0,001) всех букв русского алфавита.

331. Используя результаты, полученные в упражнении 330, и «шифр простой замены» (каждой букве русского алфавита соответствует своё двузначное число), расшифровать строки, принадлежащие А. С. Пушкину:

...11 39 22 24 33 39, 35 11 21 38 31 30 28 11 30 29 38 33 17 36 22 37 23,
38 11 35 33 37 27 17 39 15 21 38 22 24 15 25 39 22 32 31, 24 35 22, 28 11 26 22 36 21 31 36 23, 38 11 35 33 37 33 27 23 32 31
33 37 33 21 37 33 27 36 15 37 33, 28 11 30 34 33 36 15 36 22 37 23 ...

Диалог об истории

Статистика и первая перепись населения России

Профессор, мы уже встречались со словом *статистика* (статистическая вероятность, математическая статистика), но я не поняла: в каком смысле и когда это слово используется.

Само слово *статистика* происходит от латинского слова *status* — состояние, положение вещей с точки зрения закона. Изначально оно употреблялось в значении *политическое состояние.* В 1746 г. немецкий учёный *Готфрид Ахенвалль (1719—1772)* предложил заменить название курса «Государствоведение», преподававшегося тогда в университетах, на «Статистику». С тех пор долгое время люди под статистикой понимали описание экономического и политического развития государства. К середине XIX в. цель статистики определялась многими учёными и общественными деятелями как представление фактов в сжатой форме. В XX в. статистику рассматривали уже как самостоятельную научную дисциплину, базирующуюся на методах теории вероятностей. Статистика сегодня занимается описанием, анализом, сравнением, представлением и интерпретацией имеющихся данных — значений различных случайных величин.

Профессор, в Интернете указано много словосочетаний, в которые входит слово «статистика»: описательная статистика, прикладная статистика, математическая и др. Чем они отличаются друг от друга?

Например, словосочетание *описательная статистика* имеет своим истоком немецкую школу XVII—XVIII вв., которая так и называлась. Её представители (Г. Конринг, Г. Ахенвалль, А. Л. Шлёцер) своей задачей считали описание государства: территории, населения, климата, политического устройства, вероисповедания, торговли и т. д. Анализом закономерностей в наблюдаемых явлениях они ещё не занимались. Представители английской *школы политических арифметиков* (В. Пети, Дж. Граунд, Э. Галлей) своей целью уже ставили выявление закономерностей и взаимосвязей в явлениях на основе большого числа наблюдений.

Теоретическое обобщение практики учётно-статистических наработок прошедших десятилетий (с использованием методов теории вероятностей) сделал в XIX в. бельгийский учёный *Адольф Кетле (1796—1874)*. Под влиянием его идей и возникла математическая статистика, которая получила своё развитие в работах таких учёных, как Ф. Гальтон, К. Пирсон, П. Л. Чебышёв, А. А. Марков, А. М. Ляпунов, А. А. Чупров и др.

Профессор, расскажите, пожалуйста, как и когда проводились статистические исследования в России.

Началом первых статистических исследований в России можно считать учёт населения некоторых княжеств в XIII в. С XV в. в Московском государстве появился новый вид учёта земель, дворов и живущих на них людей — *сошное письмо.* С 30-х гг. XVIII в. был налажен учёт населения, проводившийся Русской православной церковью. Во всей Российской империи (кроме Финляндии) 28 января 1897 г. была проведена первая (и единственная до 1917 г.) всероссийская перепись населения Российской империи.

В переписи 2010 г. было мало вопросов. Интересно, а на какие вопросы отвечали тогда люди при переписи населения.

Тогда обследование проводилось по следующим пунктам: имя, отчество и фамилия (или прозвище); семейное состояние; отношение к главе хозяйства (родственник, свойственник, приёмыш или жилец, прислуга, работник и т. п.); размер хозяйства; пол; возраст; состояние или сословие; вероисповедание; место рождения, место прописки, место постоянного жительства; родной язык; грамотность; занятие (основное и побочное); физические недостатки.

При переписи в 1897 г. был зарегистрирован 125 640 021 житель, из них в городе проживало 16 828 395 человек (13,4%). Уровень грамотности составлял 21,1%, причём у мужчин он был значительно выше, чем у женщин (29,3% и 13,1% соответственно). Православные христиане составляли 69,3%, мусульмане — 11,1%, римо-католики — 9,1%, иудеи — 4,2%. Крупнейшие сословия: крестьянство — 77,5%, мещане (городские жители) — 10,7%, инородцы — 6,6%, казаки — 2,3%, дворяне (потомственные и личные) — 1,5%, духовенство — 0,5%, почётные граждане (потомственные и личные) — 0,3%, купцы — 0,2%, прочие — 0,4%.

Итоги и анализ результатов первой переписи населения — пример использования методов описательной статистики.

Профессор, а когда появились первые книги или учебники по статистике?

Первой работой, с которой началась история статистики как области научных знаний, считают книгу *Джона Граунда* (опубликованную в Лондоне в 1662 г.) «Естественные и политические наблюдения, перечисленные в прилагаемом оглавлении и сделанные над бюллетенями смертности по отношению к управлению, религии, торговле, росту, воздуху, болезням и разным изменениям означенного города». Не имея возможности провести перепись населения Лондона, Д. Граунд поставил и решил задачу нахождения числа жителей этого города, анализируя многолетние наблюдения за числом рождённых и умерших. Им были также проанализированы 229 250 смертей в городе за 20 лет, среди которых было отмечено 71 124 смерти детей в возрасте от 0 до 6 лет. Д. Граунд указал, что доля смертей детей в возрасте от 0 до 6 лет составляет примерно одну треть от числа всех смертей. То есть учёный фактически ввёл понятие относительной частоты и понял принцип статистической устойчивости в мире случайных величин.

§ 22 Полигоны частот

Вы строили круговые и столбчатые диаграммы как наглядные иллюстрации количественного соотношения различных данных, сравниваемых по определённому признаку. Фактически вы уже тогда занимались наглядным представлением распределения значений случайной величины по частотам (или относительным частотам). В этом параграфе вы познакомитесь с другими способами изображения распределения значений случайной величины по частотам и по вероятностям.

Нужно вспомнить:

- табличный способ представления распределения значений случайной величины;
- понятия вероятности, частоты и относительной частоты события;
- понятие процента, нахождение процента от числа;
- построение точек на координатной плоскости по их координатам.

Распределение значений случайных величин можно задавать и демонстрировать графически.

Пусть случайная величина X — размер обуви мальчиков 9 класса одной школы принимает все целочисленные значения от 38 до 45 и имеет распределение по частотам, представленное в таблице:

X	38	39	40	41	42	43	44	45
M	2	2	5	7	6	4	3	1

Отметим на координатной плоскости точки с координатами (38; 2), (39; 2), ..., (45; 1) и соединим их последовательно отрезками (рис. 44). Полученную ломаную линию называют **полигоном частот**.

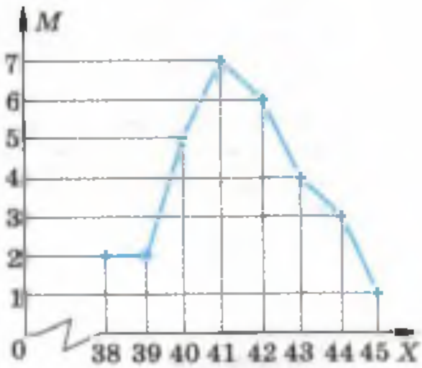


Рис. 44

Возможно графическое представление распределения случайной величины и по относительным частотам. Допустим, в фонде библиотеки имеются книги следующих направлений:

1. Художественная литература.
2. Учебная и педагогическая литература.
3. Общественно-политическая литература.
4. Научно-техническая литература.
5. Энциклопедии и словари.

Распределение величины X — книг того или иного направления по относительным частотам представлено в таблице, где 1, 2, 3, 4 и 5 — условные значения случайной величины X (соответствующие её порядковому номеру в списке наименований направлений):

X	1	2	3	4	5
W	0,55	0,21	0,1	0,08	0,06

$\sum W = 1$

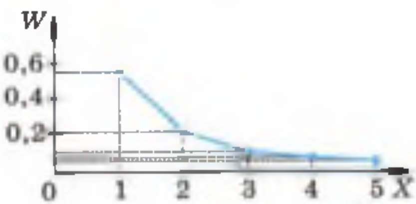


Рис. 45

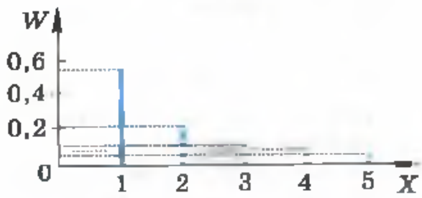


Рис. 46

Распределение величины X можно наглядно представить в виде **полигона относительных частот** (рис. 45), в виде линейной диаграммы (рис. 46) или в виде круговой диаграммы, предварительно переведя значения относительной частоты в проценты (рис. 47). Если случайная величина принимает много различных значений, то их распределение по частотам можно представить после **разбиения на классы** всех упорядоченных её значений. Количество классов может быть любым, удобным для рассмотрения (обычно их выбирают в количестве от 4 до 12). При этом размеры классов (все, кроме, быть может, крайних) должны быть одинаковыми.

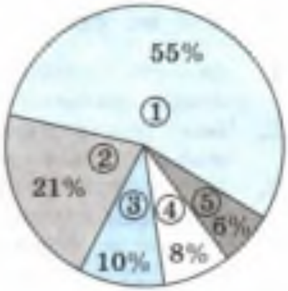


Рис. 47

Пример. В таблице представлены сведения о премиях 100 рабочих одного предприятия. При этом премии (округлённые до целого числа рублей) сгруппированы в 7 классов, каждый размером в 1000 р.

Классы	От 8001 до 9000	От 9001 до 10 000	От 10 001 до 11 000	От 11 001 до 12 000	От 12 001 до 13 000	От 13 001 до 14 000	От 14 001 до 15 000
Номер класса X	1	2	3	4	5	6	7
Частота (количество рабочих) M	4	6	18	36	22	10	4

Проверка: $\sum M = 100$.

Наглядно частотное распределение зарплат по классам можно представить, например, с помощью полигона частот (рис. 48) или столбчатой диаграммы (рис. 49).

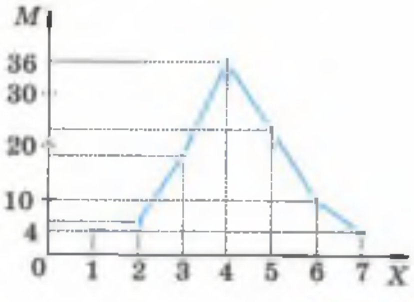


Рис. 48

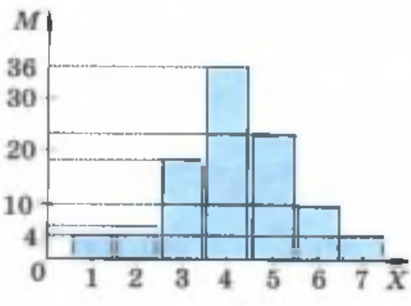


Рис. 49

Устные вопросы и задания

1. Назвать основные способы наглядного представления распределения значений случайной величины. Описать эти способы.
2. Чему равна: сумма частот; сумма относительных частот всех значений случайной величины?
3. Как поступают, если нужно наглядно представить распределение значений случайной величины?
4. На какое количество классов обычно разбивают совокупность, имеющую большое число значений случайной величины?

Вводные упражнения

1. Поверхность рулетки разделена на 10 одинаковых секторов. На двух из них записано число 1, на трёх — число 2, на четырёх — число 3 и на одном — число 4. Составить таблицу распределения по вероятностям значений случайной величины X — числа, на котором остановилась стрелка рулетки после её раскручивания.
2. Составить таблицу распределения по частотам значений случайной величины X — стоимости хлебных изделий (выраженную в рублях за штуку), лежащих на прилавке магазина: 22, 27, 25, 22, 28, 22, 25, 22, 28, 27.
3. На координатной плоскости построить ломаную линию $ABCD$, если $A\,(0;\,1)$, $B\,(1;\,5)$, $C\,(2;\,3)$, $D\,(3;\,0)$, $E\,(4;\,4)$.

Упражнения

332. На основании данных таблицы представить в виде линейной и круговой диаграмм распределение значений случайной величины X:

1)

X	1	2	3	4
W	0,1	0,3	0,4	0,2

2)

X	1	2	3	4	5
W	0,3	0,3	0,2	0,1	0,1

333. На основании данных частотной таблицы построить таблицу распределения значений величины X по относительным частотам:

1)

X	1	2	3	4	5
M	2	3	5	8	12

2)

X	1	2	3	4	5	6
M	2	5	15	20	5	3

Построить столбчатую и круговую диаграммы относительных частот распределения значений величины X.

334. Построить полигон частот и полигон относительных частот значений случайной величины X, распределение которой по частотам представлено в таблице:

1)

X	11	12	13	14	15
M	3	1	5	6	5

2)

X	23	24	25	26	27	28
M	6	5	2	3	1	3

335. Измерив рост 50 девятиклассников в сантиметрах, результаты записали в таблицу:

149	150	150	151	151	152	152	153	154	154
155	155	155	156	156	157	157	157	158	158
159	159	159	159	161	161	161	162	162	162
162	162	165	166	166	166	167	167	169	170
171	171	173	173	173	175	176	178	180	182

Сгруппировав данные по классам 145—149, 150—154, ..., 180—184, представить частотное распределение роста учащихся по этим классам с помощью: 1) таблицы частот; 2) полигона частот; 3) столбчатой диаграммы.

336. При переписи населения данные о возрасте (полном количестве прожитых лет) жильцов некоторого дома оказались следующими:

34, 31, 2, 8, 48, 40, 20, 15, 12, 21, 20, 0, 68, 39, 35, 16; 13, 9, 4, 72, 74, 75, 45, 44, 23, 18, 88, 60, 54, 30, 32, 11, 10, 5, 57, 53, 56, 24, 2, 1, 60, 59, 34, 30, 9, 7, 43, 42, 19, 1, 36, 37, 14, 13, 9, 62, 58, 19, 39, 35, 12, 8, 40, 25, 3, 33, 34, 8, 7, 4, 28, 0, 41, 29, 21, 1, 31, 27, 6, 3, 70, 56, 67, 25, 24, 2.

Разбить приведённые выше данные по классам. Представить распределение данных, сгруппированных по классам, в виде полигона частот.

Диаграммы разброса

Вы когда-нибудь наблюдали в реальной жизни за взаимосвязью двух изменяющихся величин?

Конечно. Например, чем больше я решаю задач по теме, тем выше получаю оценку за контрольную работу.

Весной и летом я замечаю, что чем выше температура воздуха, тем меньше одежды надевают люди и тем больше пьют воды.

Хорошие наблюдения. Переведём последнее из этих наблюдений на язык величин, затем на этом примере попробуем наглядно проиллюстрировать взаимную зависимость (или независимость) одной величины от другой.

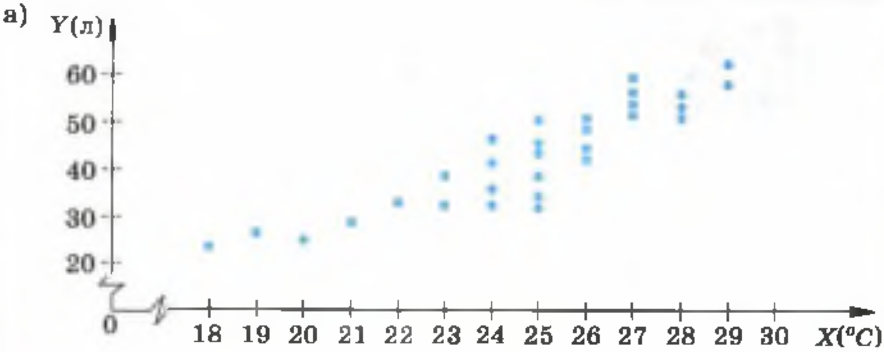
Рассмотрим конкретную торговую точку в г. Туле и случайные величины: X — температуру воздуха в Туле и Y — количество проданной за сутки в этой точке бутилированной воды. Значения величины X будем измерять в градусах по Цельсию в 12 ч дня, а значения Y — в литрах. Допустим, в течение 30 дней июня проводились наблюдения за этими величинами, и результаты заносились в таблицу:

X, °C	Y, л	X, °C	Y, л	X, °C	Y, л
19	26	26	42	29	61
18	24	25	44	27	58
21	29	26	48	26	50
23	32	27	52	24	41
20	25	27	54	25	45
22	33	24	46	23	38
24	32	25	50	24	35
25	31	27	55	26	43
25	34	28	50	28	52
25	38	28	55	29	56

Построим на координатной плоскости все тридцать точек с координатами $(X; Y)$, указанными в таблице.

Забавное облако из точек получилось (рис. *а*). Оно вытянуто из левого нижнего угла квадранта в правый верхний.

То есть наглядно видна тенденция роста значений величины Y с ростом значений величины X. Совокупность полученных таким образом точек называют *корреляционным по-*

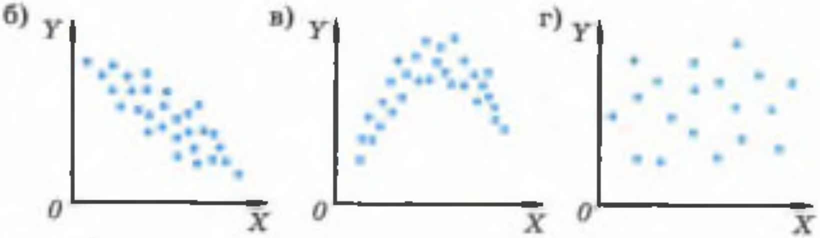


лем или *диаграммой разброса* данных (значений двух случайных величин).

Профессор, а что означает слово *корреляционное*?

Это прилагательное образовано от слова *корреляция*, происходящего от латинского *correlatio* — *соотношение*. В рассмотренном нами примере имеет место *прямая корреляция*. На рисунках *б* — *г* показаны другие виды корреляции между значениями двух величин X и Y. Замечу, что не всегда с помощью диаграммы разброса можно легко обнаружить корреляцию между величинами. Немало величин, которые наблюдаются в одном и том же испытании, но никак не зависят друг от друга, т. е. корреляции между ними не наблюдается (см. рис. *г*). Например, число покупаемых билетов на домашние матчи футбольной команды не зависит от уровня доходов болельщиков.

Я придумал зависимости, которые могут быть проиллюстрированы диаграммами с рисунков *б* и *в*. Мне кажется, что зависимость числа покупок дешёвых автомашин (Y) от уровня доходов населения (X) находится в обратной корреляционной зависимости. А криволинейную корреляцию будет иметь зависимость числа покупаемых автомобилей среднего класса (Y) от уровня доходов населения (X) (см. рис. *в*).



обратная корреляция

криволинейная корреляция

корреляция отсутствует

§ 23 Генеральная совокупность и выборка

Как по небольшому числу выбранных из партии деталей (изготовленных на заводе) определить процент бракованных деталей во всей партии? Как с помощью выяснения размеров одежды у нескольких сотен мужчин сделать вывод о распределении по частотам размеров мужской одежды в большом городе? На эти и подобные вопросы, возникающие в реальной жизни и на производстве, вы найдёте ответы после изучения данного параграфа.

Нужно вспомнить:

- понятия частоты и относительной частоты значений случайной величины;
- чему равны суммы частот и суммы относительных частот всех значений случайной величины;
- понятие пропорции; нахождение неизвестного члена пропорции.

В реальной жизни схожие элементы некоторой совокупности сравнивают по различным признакам. Учащихся 9 классов можно сравнивать, например, по росту, размеру одежды, успеваемости и т. д. Болты можно сравнивать по длине, диаметру, весу, материалу и т. д. Практически любой признак либо поддаётся непосредственному измерению, либо он может получить условную числовую характеристику (см. пример с книгами в § 22). Таким образом, некоторый признак элементов совокупности можно рассматривать как случайную величину, принимающую те или иные числовые значения.

При изучении реальных явлений часто бывает невозможно обследовать все элементы совокупности. Например, практически невозможно выявить размеры обуви у всех людей планеты. А проверить, например, наличие листов некачественной фотобумаги в большой партии хотя и реально, но бессмысленно, так как полная проверка приведёт к уничтожению всей партии бумаги.

В подобных случаях вместо изучения всех элементов совокупности, которую называют **генеральной совокупностью**, обследуют часть её элементов, выбранных случайным образом. Эту часть называют **выборкой**.

! Если в выборке присутствуют все значения случайной величины примерно в тех же пропорциях, что и в генеральной совокупности, то эту выборку называют **репрезентативной** (от фр. *representatif* — представительный).

Например, если менеджер швейной фабрики большого города хочет выяснить, в каком количестве нужно шить одежду тех или иных размеров, он должен составить репрезентативную выборку людей этого города. **Объём выборки** может быть и не очень большим, но в качестве такой выборки нельзя, например, брать только детей детского сада или только рабочих одного завода. Очевидно, микромоделью города могут послужить жильцы многоквартирного дома (или нескольких домов), в котором примерно в тех же пропорциях, что и в самом городе, проживают люди разных возрастов и разных комплекций.

Пусть $\overline{\overline{S}}$ — объём генеральной совокупности, N — объём репрезентативной выборки, в которой значения исследуемого признака (случайной величины) распределены по частотам M_1, M_2, ..., M_k, где $\sum M = N$. Требуется в генеральной совокупности найти частоты S_1, S_2, ..., S_k тех же значений признака, что и в выборке $\left(\sum S = \overline{\overline{S}}\right)$. Для идеально составленной репрезентативной выборки

$$\frac{M_i}{N} = W_i = \frac{S_i}{\overline{\overline{S}}}, \tag{1}$$

где i — порядковый номер значения признака $(1 \leqslant i \leqslant k)$. Из соотношений (1) находим $S_i = \overline{\overline{S}}\,\frac{M_i}{N}$ или

$$S_i = \overline{\overline{S}}W_i, \text{ где } 1 \leqslant i \leqslant k. \tag{2}$$

Задача 1. Фабрика выиграла тендер на изготовление $\overline{\overline{S}} = 10\,000$ армейских противогазов. Для определения того, сколько противогазов каждого из пяти существующих размеров следует изготовить, были сделаны замеры у $N = 100$ случайным образом выбранных солдат ближайшей воинской части. Распределение размеров противогазов X по частотам M оказалось следующим:

X	0	1	2	3	4
M	5	21	47	22	5

Сколько противогазов каждого размера будет изготавливать фабрика?

▶ Будем считать исследуемую выборку объёмом $N = 100$ солдат репрезентативной. Тогда в генеральной совокупности (объёмом $\overline{\overline{S}} = 10\,000$ солдат) число противогазов каждого размера пропорционально числу противогазов соответствующего размера в выборке и для каждого размера это число находится по формуле (2). Результаты расчётов будем записывать в таблицу:

Размер (X)	0	1	2	3	4	
Частота в выборке (M)	5	21	47	22	5	$\sum M = N = 100$
Относительная частота	0,05	0,21	0,47	0,22	0,05	$\sum W = 1$
Число противогазов ($\overline{\overline{S}} \cdot W$)	500	2100	4700	2200	500	$\sum \left(\overline{\overline{S}} \cdot W\right) = \overline{\overline{S}} = 10\,000$

Ответ.

Размер	0	1	2	3	4
Число противогазов	500	2100	4700	2200	500

В промышленности и сельском хозяйстве для определения количественного соотношения изделий разного сорта пользуются так называемым **выборочным методом**. Суть этого метода будет ясна из описания следующего опыта.

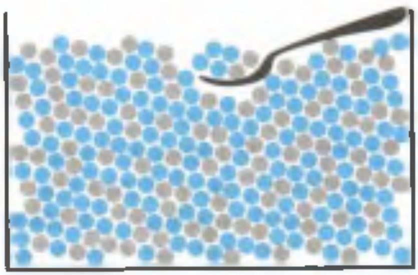


Рис. 50

В коробке тщательно перемешан горох двух сортов: зелёный и жёлтый. Небольшой ёмкостью, например ложкой (рис. 50), извлекают из разных мест коробки небольшие порции гороха. В каждой порции подсчитывают число жёлтых (M) и число всех (N) горошин. Для каждой порции находят относительную частоту появления жёлтой горошины $W = \frac{M}{N}$. Так поступают k раз (на практике обычно берут $5 \leqslant k \leqslant 10$) и каждый раз вычисляют относительную частоту.

За статистическую вероятность изъятия жёлтой горошины из коробки можно принять среднее арифметическое полученных относительных частот $W_1, W_2, \ldots, W_k$:

$$W_{ср} = \frac{W_1 + W_2 + \ldots + W_k}{k},$$

Устные вопросы и задания

1. Что называют генеральной совокупностью?
2. Что такое выборка; репрезентативная выборка?
3. Что в переводе с французского языка означает слово *representatif*?
4. Что такое объём выборки?
5. Как найти распределение значений случайной величины в генеральной совокупности, если известно распределение этих значений в репрезентативной выборке?

Вводные упражнения

1. Дано распределение по частотам значений случайной величины X в выборке, объём которой равен 100. Найти значение m:

1)

X	1	2	3	4	5
M	10	m	25	35	15

2)

X	3	5	7	9
M	26	40	m	14

2. Дано распределение значений случайной величины X по относительным частотам. Найти значение w.

1)

X	2	4	6	8
W	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	w

2)

X	1	2	3	4
W	0,1	w	0,3	0,2

3. Найти неизвестный член пропорции: 1) $\frac{5}{x}=\frac{65}{91}$; 2) $\frac{7}{11}=\frac{119}{x}$.

Упражнения

337. Определить, какую из предложенных в последнем столбце таблицы выборок можно считать репрезентативной.

Номер задания	Генеральная совокупность	Цель обследования	Выборка
1	Партия отлитых деталей объёмом 10 000 штук	Определение числа бракованных деталей в партии	1) 5 рядом лежащих деталей; 2) 5 деталей, выбранных случайным образом из разных частей партии; 3) 100 деталей, выбранных случайным образом из разных частей партии

Продолжение

Номер задания	Генеральная совокупность	Цель обследования	Выборка
2	Партия штампованных деталей объёмом 100 000 штук	Определение среднего веса детали в партии	1) 2 детали; 2) 100 деталей, отштампованных последними; 3) 50 случайным образом выбранных деталей из партии
3	Урожай зерна с поля площадью 1000 га	Определение урожайности зерна на этом поле	1) Урожай зерна с северного склона холма площадью 100 га, принадлежащего полю; 2) урожай зерна с двух соседних участков площадью 10 га каждый; 3) урожай зерна с 10 участков, каждый из которых площадью 10 соток выбран на поле случайным образом

338. В таблице указана цель статистического обследования населения большого города и то, каким образом составлялась выборка из генеральной совокупности. Попытаться объяснить, почему составленную выборку нельзя считать репрезентативной.

Номер задания	Цель обследования	Выборка
1	Выявление читательских интересов	1) Дети старшей группы детского сада; 2) студенты исторического факультета университета
2	Выявление любимых песен	1) 100 учащихся музыкальной школы; 2) 100 человек, случайным образом остановленных и опрошенных вечером на улице города
3	Определение числа больных гриппом в городе во время пика эпидемии	1) 100 случайным образом выбранных пациентов терапевтических кабинетов поликлиник города;

Номер задания	Цель обследования	Выборка
		2) жильцы одного подъезда двухэтажного дома
4	Определение среднего уровня доходов населения	1) 300 случайным образом выбранных жильцов студенческого общежития; 2) все жители коттеджного района города
5	Определение наиболее ходовых размеров джинсов	1) Все студенты хореографического училища; 2) члены секции сумо
6	Определение количества домашних кошек и собак, приходящегося на душу населения в городе	1) Жильцы двадцати частных домов; 2) жильцы многоквартирного дома

339. Относительная частота появления имён существительных в тексте некоторого автора близка к 0,4. Сколько (приблизительно) имён существительных встретится в случайным образом выбранном отрывке из текста этого же автора, если всего в этом отрывке 500 слов?

340. В отрывке из художественного произведения объёмом 600 слов некоторого автора глаголы встречаются 72 раза. Определить примерное количество глаголов в отрывке объёмом 2000 слов из текста того же автора.

341. Обувной цех должен выпустить 1000 пар кроссовок молодёжного фасона. С этой целью были выявлены размеры обуви у 50 случайным образом выбранных подростков. Распределение выявленных размеров по частотам представлено в таблице:

Размер (X)	35	36	37	38	39	40	41	42
Частота (M)	3	5	6	12	11	7	4	2

Считая рассмотренную выборку репрезентативной, определить, сколько пар кроссовок каждого размера выпустит обувной цех.

342. Среди случайным образом выбранных 100 молодых людей, носящих летом кепки, провели опрос о цветовых предпочтениях для этого вида головных уборов. Результаты опроса отражены в таблице:

Цвет	Чёрный	Красный	Синий	Серый	Белый	Жёлтый	Зелёный
Частота	32	20	16	14	11	5	2

Считая рассмотренную выборку репрезентативной, высказать рекомендации швейной фабрике по количеству выпускаемых кепок каждого цвета, если фабрика должна подготовить к продаже 30 000 кепок.

Это интересно

Большая выборка ещё не значит репрезентативная

Профессор, а может ли большая выборка из генеральной совокупности оказаться не репрезентативной?

Приведу любопытный пример огромной, но не репрезентативной выборки, ошибочность составления которой обсуждали все американцы перед Второй мировой войной. В 20-е и 30-е гг. XX в. популярный в США журнал «Literary Digest» проводил широкомасштабные опросы общественного мнения, и результаты были всегда очень точны. Перед выборами президента в 1936 г. журнал провёл масштабный опрос (на выборке порядка 2 млн человек) и установил, что выборы можно не проводить, так как кандидат от республиканской партии А. Ландон с существенным отрывом опережает второго кандидата — демократа Ф. Рузвельта. Выборы, конечно, были проведены, а те, кто интересуется историей, знают, что с большим перевесом голосов на этих выборах победил Ф. Рузвельт.

Что же произошло? Почему авторитетный журнал ошибся?

Всё оказалось просто. Двухмиллионная выборка опрошенных оказалась не репрезентативной по следующим причинам. Опросники и анкеты журнал высылал людям, чьи фамилии и адреса выбирались из двух источников: из телефонных справочников и списков регистрации автомобилей. Во время Великой депрессии 1930-х гг. не очень богатые избиратели, которые и голосовали за Рузвельта, не могли себе позволить иметь телефон и тем более автомобиль. Они и проголосовали на реальных выборах за Ф. Рузвельта.

§ 24 Центральные тенденции

В этом параграфе вы узнаете, как можно сравнивать по общему признаку разные выборки и как можно одним числом охарактеризовать совокупность однородных данных.

Нужно вспомнить:

- понятия генеральной совокупности и выборки;
- понятие частоты значений случайной величины;
- понятие среднего арифметического нескольких чисел;
- округление и сравнение чисел.

1. Мода и медиана

Генеральные совокупности и выборки случайных величин иногда приходится характеризовать одним числом. На практике это бывает необходимо, например, для быстрого сравнения двух или нескольких совокупностей по общему признаку.

Рассмотрим конкретный пример.

Имеются: 1) распределение по частотам M значений случайной величины X — числа прочитанных за каникулы книг десятью девочками (таблица слева); 2) распределение по частотам значений случайной величины Y — числа прочитанных за каникулы книг девятью мальчиками того же класса (таблица справа).

X	3	4	5	8	12
M	3	2	3	1	1

$N = \sum M = 10$

Y	3	4	5	6	7
M	2	4	1	1	1

$N = \sum M = 9$

Нужно сравнить **интерес к чтению** девочек и мальчиков этого класса. Когда в совокупности (выборке) число элементов N небольшое, все значения, которые они принимают, можно для обозримости выписать в виде упорядоченного ряда чисел — последовательности значений случайной величины в порядке их возрастания. При этом каждое значение выписывается столько раз, какова его частота в совокупности. Например, заданные таблицами распределения величины X и Y могут быть записаны соответственно в виде следующих рядов:

$$3,\ 3,\ 3,\ 4,\ 4,\ 5,\ 5,\ 5,\ 8,\ 12; \qquad (1)$$

$$3,\ 3,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7. \qquad (2)$$

Для сравнения предложенных совокупностей могут быть использованы различные характеристики. Перечислим некоторые из них.

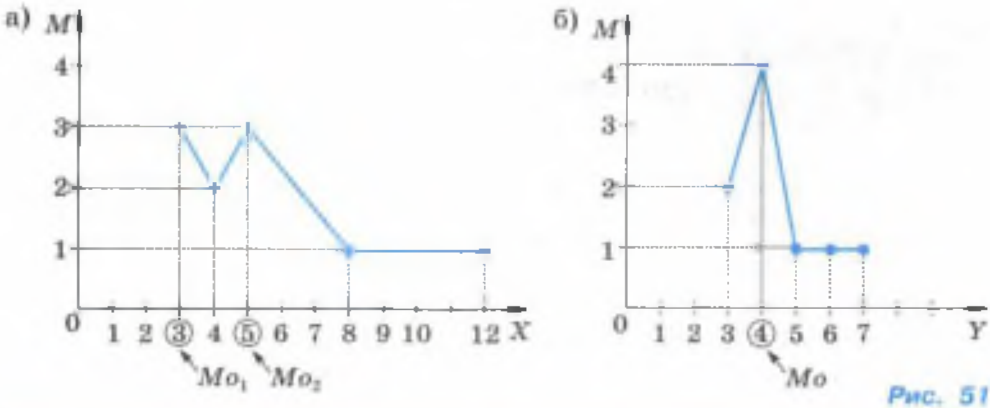


Рис. 51

! Определение. **Мода** (обозначают Mo) — наиболее часто встречающееся значение случайной величины.

Так, в совокупности (1) две моды: $Mo_1 = 3$ и $Mo_2 = 5$ (значения 3 и 5 имеют одинаковые частоты $M = 3$). В совокупности (2) $Mo = 4$, так как значение 4 в совокупности (2) встречается чаще других. На рисунках 51, *а* и 51, *б* изображены полигоны частот рядов (1) и (2) соответственно (моды совокупностей выделены кружками).

! Определение. **Медиана** (обозначают Me) — это серединное значение упорядоченного ряда значений случайной величины.

В ряду (1) чётное число членов — десять. Для него медиана равна среднему арифметическому двух центральных значений: пятого (оно равно 4) и шестого (оно равно 5), т. е. $Me = \frac{4+5}{2} = 4{,}5$.

В ряду (2) нечётное число элементов — девять. Его медиана равна значению центрального, пятого члена ряда: $Me = 4$.

Можно сказать, что медиана делит упорядоченный ряд чисел на две равные по количеству элементов части:

4,5

3 3 3 4 4 ↑ 5 5 5 8 12

медиана

3 3 4 4 4 4 5 6 7

О совокупности девочек (1) можно сказать, что одна половина из них прочитала меньше, чем 4,5 книги, а другая половина — больше, чем 4,5 книги. В совокупности (2) одна половина мальчиков прочитала не больше 4 книг, а другая половина — не меньше 4 книг.

Задача 1. Найти моду и медиану следующей выборки значений случайной величины: $-2,\ 3,\ 4,\ -3,\ 0,\ 1,\ 3,\ -2,\ -1,\ 2,\ -2,\ 1$.

▶ Запишем предложенные значения в виде упорядоченного ряда чисел: $-3,\ -2,\ -2,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 3,\ 4$.
Значение -2 в совокупности встречается чаще других, поэтому её мода $Mo=-2$. Так как число элементов совокупности $N=12$ — число чётное, то медиана равна среднему арифметическому значений шестого и седьмого членов полученного упорядоченного ряда чисел:

$$Me=\frac{0+1}{2}=0{,}5.$$

Ответ. $Mo=-2$, $Me=0{,}5$. ◁

2. Среднее значение

! **Средним** значением случайной величины X (обозначается $\overline{X}$) называют среднее арифметическое всех её значений.

Если все значения случайной величины $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_N$ различны, то

$$\overline{X}=\frac{X_1+X_2+\ldots+X_N}{N}. \qquad (3)$$

Если значения случайной величины $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_k$ имеют в совокупности соответственно частоты $M_1,\ M_2,\ \ldots,\ M_k$, то

$$\overline{X}=\frac{X_1M_1+X_2M_2+\ldots+X_kM_k}{M_1+M_2+\ldots+M_k}. \qquad (4)$$

Зная, что $\sum M=N$, формулу (4) можно переписать в виде

$$\overline{X}=\frac{X_1M_1+X_2M_2+\ldots+X_kM_k}{N}. \qquad (4')$$

Возвращаясь к примеру с изучением интереса к чтению у девочек и мальчиков класса, найдём по формуле (4) средние значения предложенных совокупностей:

$$\overline{X}_д=\frac{3\cdot3+4\cdot2+5\cdot3+8\cdot1+12\cdot1}{3+2+3+1+1}=\frac{52}{10}=5{,}2,$$

$$\overline{X}_м=\frac{3\cdot2+4\cdot4+5\cdot1+6\cdot1+7\cdot1}{2+4+1+1+1}=\frac{40}{9}\approx4{,}4.$$

Так как $\overline{X}_д>\overline{X}_м$, можно говорить, что за один и тот же промежуток времени девочки в среднем читают больше книг, чем мальчики.

Задача 2. На соревнованиях по фигурному катанию 2 фигуристки получили (по шестибалльной шкале) оценки судей, представленные в таблице:

Номер фигуристки	Номер судьи								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4,8	5,6	4,9	5,2	4,7	4,9	4,9	4,8	4,7
2	5,1	4,2	5,0	4,9	5,0	5,1	5,0	5,1	5,0

Которая из фигуристок выступила лучше?

▶ Запишем в таблицы распределения по частотам оценок X и Y, выставленных соответственно первой и второй фигуристкам:

X	4,7	4,8	4,9	5,2	5,6
M	2	2	3	1	1

$\sum M = N = 9$

Y	4,2	4,9	5,0	5,1
M	1	1	4	3

$\sum M = N = 9$

Найдём средние значения оценок каждой из фигуристок:

$$\overline{X} = \frac{4,7 \cdot 2 + 4,8 \cdot 2 + 4,9 \cdot 3 + 5,2 \cdot 1 + 5,6 \cdot 1}{9} = \frac{44,5}{9} \approx 4,94,$$

$$\overline{Y} = \frac{4,2 \cdot 1 + 4,9 \cdot 1 + 5,0 \cdot 4 + 5,1 \cdot 3}{9} = \frac{44,4}{9} \approx 4,93.$$

Получаем $\overline{X} > \overline{Y}$, хотя очевидно, что у второй фигуристки почти все оценки больше 5,0, а у первой — меньше 5,0. При этом сравнение в пользу второй фигуристки выглядит несправедливым. Такой результат получен, скорее всего, из-за необъективности 2-го судьи, завысившего по сравнению с остальными судьями оценку первой фигуристке и занизившего оценку второй.

Для большей объективности сравнения результатов на многих соревнованиях из совокупности баллов каждого спортсмена отбрасывают наибольшее и наименьшее значения.

После отбрасывания наибольшего и наименьшего значений из совокупности баллов каждой фигуристки имеем

$$\overline{X}' = \frac{4,7 \cdot 1 + 4,8 \cdot 2 + 4,9 \cdot 3 + 5,2 \cdot 1}{7} = \frac{34,2}{7} \approx 4,89,$$

$$\overline{Y}' = \frac{4,9 \cdot 1 + 5,0 \cdot 4 + 5,1 \cdot 2}{7} = \frac{35,1}{7} \approx 5,01.$$

Так как $\overline{X}' < \overline{Y}'$, считаем, что вторая фигуристка выступала лучше первой. ◁

В книгах по статистике моду, медиану и среднее объединяют одним термином — **меры центральной тенденции** (или, короче, **центральные тенденции**), подчёркивая тем самым возможность измерить, охарактеризовать совокупность одним числом, к которому стремятся все её значения.

Не для каждой совокупности имеет смысл формально находить центральные тенденции. Например, если исследуется совокупность

$$120,\ 120,\ 180,\ 11\,500 \qquad (5)$$

годовых доходов четверых людей (в тыс. р.), то очевидно, что ни мода (120), ни медиана (150), ни среднее (2980) не могут выступать в роли объективной характеристики всех значений. Это объясняется тем, что разность наибольшего и наименьшего значений выборки (11 380) соизмерима с наибольшим её значением, а среднее значение на порядок больше моды.

Если в выборке **среднее** значение существенно отличается от **моды**, то его неразумно выбирать в качестве типичного представителя совокупности данных.

В рассмотренном примере можно было искать центральные тенденции, например, части совокупности (5): 120, 120, 180, условно назвав её выборкой годовых доходов малообеспеченных людей.

Устные вопросы и задания

1. Что такое мода и медиана выборки значений случайной величины?
2. Как найти медиану выборки, имеющей нечётное; чётное число элементов?
3. Что такое среднее значение выборки значений случайной величины X? Как обозначается среднее значение этой выборки?
4. Каким общим термином называют такие характеристики выборки, как мода, медиана и среднее?

Вводные упражнения

1. Расположить в порядке возрастания числа:

   1) 0,35; 0,38; 0,40; 0,36; 0,41; 2) $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{7}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$.
2. Найти среднее арифметическое чисел:

   1) 15 и 25; 2) 10, 11 и 13; 3) $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ и 1.
3. Отметить на координатной плоскости точки $A\,(0;\,1)$; $B\,(1{,}5;\,3)$; $C\,(4;\,0)$.
4. Найти с точностью до 0,01 значение выражения:

   1) $3{,}75 : 6 + 1{,}37$; 2) $\frac{1{,}4 \cdot 7 + 2{,}8 \cdot 6}{3}$.

Упражнения

343. Найти моду и медиану совокупности значений случайной величины X:

1) 1, 1, 2, 2, 2, 3, 5, 5, 6, 6, 6, 9;

2) −4, −2, −2, −1, 0, 2, 2, 2, 2, 5, 7.

Построить полигон частот значений величины X. Указать моду совокупности.

344. Найти моду и медиану совокупности значений величины X:

1)

X	2	3	4	5
M	3	4	1	3

2)

X	−1	2	3	5	6
M	2	3	4	4	1

Построить полигон частот значений величины X. Указать на нём моду и медиану совокупности.

345. Найти моду и медиану выборки:

1) 1, 3, −2, 4, −2, 0, 2, 3, 1, −2, 4;

2) 0,2; 0,4; 0,1; 0,5; 0,1; 0,2; 0,3; 0,5; 0,4; 0,6.

346. Найти среднее значение выборки:

1) 3, 4, 1, 2, 5;

2) 2, −5, 4, −3, −2, 1;

3) −2, −2, 3, 3, 3, 5, 5;

4) 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 6.

347. Найти среднее значение случайной величины X:

1)

X	−1	2	3	5
M	3	4	5	2

2)

X	0	1	3	5	6
M	4	5	6	3	2

348. Построить полигон частот значений случайной величины X из упражнения 347 и указать на нём среднее значение совокупности.

349. При определении различными способами плотности материала, из которого изготовлена деталь, были получены следующие данные: 6,98 г/см^3, 7,04 г/см^3, 7,01 г/см^3, 6,97 г/см^3, 7,00 г/см^3. Найти среднее арифметическое этой совокупности. Высказать предположение о материале, из которого изготовлена деталь.

350. Педагогический стаж восьми учителей школы, работающих в старших классах одной школы, следующий: 5 лет, 8 лет, 15 лет, 12 лет, 17 лет, 14 лет, 18 лет, 9 лет. Найти среднее и медиану этой выборки.

351. Девочки 9 класса на уроке физкультуры при прыжках взяли высоты, величины которых (в см) учитель записал в журнал:

90, 125, 125, 130, 130, 135, 135, 135, 140, 140, 140.

Какая высота прыжка наилучшим образом характеризует спортивную подготовку девочек класса?

352. В таблице приведены данные о рабочем стаже (в годах) сотрудников лаборатории. Найти среднее, моду и медиану рассматриваемой совокупности.

Стаж работы	1	2	4	5	7	10	11	12	16	19	20	21	22	25
Число сотрудников	2	1	4	3	4	2	3	1	2	5	3	1	1	2

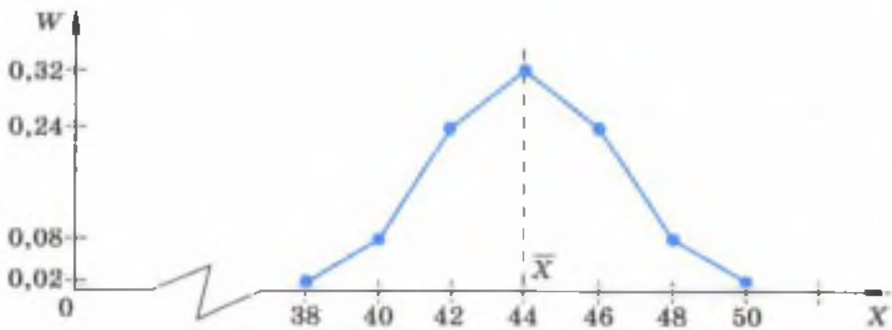
Это интересно

Центральные тенденции при нормальном распределении значений случайной величины

Профессор, когда мы исследовали выборки значений случайных величин, связанные с размерами одежды, обуви и т. п., то, по-моему, все данные этих совокупностей были практически симметричны (если так можно сказать) относительно своей медианы. И такое ощущение, что в этих выборках мода, медиана и среднее были очень близки или совпадали...

Ты абсолютно прав. Обнаружено, что многие признаки различных явлений природы и техники (рост и вес взрослых живых организмов, результаты измерений однотипных технических изделий, дальность полёта снарядов при стрельбе по цели из одного и того же орудия и др.) имеют схожие распределения своих значений по относительным частотам. Такие (и им подобные) распределения называют *нормальными распределениями* значений случайной величины.

На рисунке изображён полигон относительных частот величины X — значений размеров одежды девятиклассниц школ одного района. Полигон этого распределения действительно симметричен относительно вертикальной прямой, проходящей через абсциссу, равную среднему значению $\overline{X}$. Причём для этой совокупности $\overline{X} = Mo = Me = 44$.



§ 25 Меры разброса

Меры центральной тенденции, с которыми вы познакомились в предыдущем параграфе, позволяют охарактеризовать все значения совокупности некоторым числом (или несколькими числами). При этом, однако, не учитываются различия между отдельными элементами выборки и степень их концентрации около центральных тенденций.
В этом параграфе вы познакомитесь с новыми характеристиками выборки, дающими возможность измерить *степень разброса* элементов выборки.

Нужно вспомнить:

- понятия среднего значения выборки, медианы и моды;
- представление распределения значений случайной величины с помощью таблицы; с помощью полигона.

Рассмотрим две упорядоченные выборки:

2; 3; 4; 5; 6; 7; 8 и 2; 4,4; 4,8; 5; 5,2; 5,6; 8.

Они не имеют моды и имеют одинаковые средние значения (равные 5), совпадающие с медианами. Таким образом, центральные тенденции этих выборок одинаковы. Однако очевидно, что они отличаются друг от друга значениями элементов и их **разбросом** около среднего значения: можно сказать, что элементы первой выборки распределены в совокупности равномерно на промежутке [2; 8], а большинство элементов второй выборки сконцентрировано около среднего значения, хотя все они тоже принадлежат промежутку [2; 8], имеющему длину 6.

! Определение. Разница между наибольшим и наименьшим значениями случайной величины в выборке называется **размахом** выборки и обозначается R.

На рисунке 52 с помощью точек на числовой прямой показаны значения случайных величин в рассмотренных выборках и размах каждой из этих выборок.

Размах характеризует границы разброса элементов выборки, а степень концентрации их около среднего значения характеризуют другие статистические величины, с которыми мы познакомимся в ходе рассмотрения следующих примеров и задач.

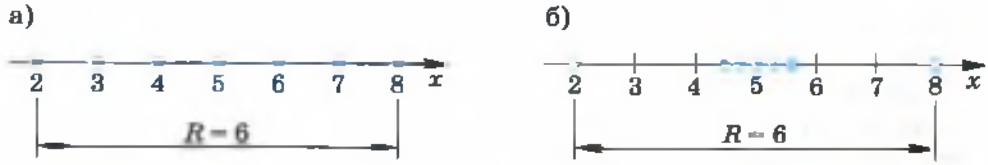


Рис. 52

П р и м е р. Допустим, что на место токаря претендуют двое рабочих. Для каждого из них установили испытательный срок, в течение которого они должны были изготавливать одинаковые детали. Результаты работы претендентов представлены в таблице:

День недели	Дневная выработка	
	первого рабочего (X)	второго рабочего (Y)
Понедельник	52	61
Вторник	54	40
Среда	50	55
Четверг	48	50
Пятница	46	44
	$\Sigma X = 250$	$\Sigma Y = 250$

Каждый из рабочих за 5 дней изготовил 250 деталей, значит, средняя производительность труда за день у обоих рабочих одинаковая:

$$\overline{X} = \overline{Y} = \frac{250}{5} = 50 \text{ (дет./день).}$$

Моды у предложенных совокупностей отсутствуют, а медианы также одинаковые (50 и 50). Кого из этих рабочих предпочтительнее взять на работу? В данном случае в качестве критерия сравнения совокупностей может выступать **стабильность** производительности труда рабочего. Её можно оценивать с помощью отклонений от среднего значения элементов совокупности.

! **Отклонением от среднего** называют разность между рассматриваемым значением случайной величины и средним значением выборки.

Например, если значение величины $X_1 = 52$, а значение среднего $\overline{X} = 50$, то отклонение X_1 от среднего равно $X_1 - \overline{X} = 52 - 50 = 2$.

Очевидно, отклонение от среднего может быть как положительным, так и отрицательным числом. Нетрудно показать, что **сумма отклонений всех значений выборки от среднего значения равна нулю.** Поэтому характеристикой стабильности элементов совокупности может служить **сумма квадратов отклонений от среднего.**

Из предложенной ниже таблицы видно, что у второго рабочего сумма квадратов отклонений от среднего больше, чем у первого рабочего:

$$\Sigma(X - \overline{X})^2 < \Sigma(Y - \overline{Y})^2.$$

День недели	Значение случайной величины		Отклонение от среднего $\overline{X} = \overline{Y} = 50$		Квадраты отклонений	
	X	Y	$X - \overline{X}$	$Y - \overline{Y}$	$(X - \overline{X})^2$	$(Y - \overline{Y})^2$
Понедельник	52	61	2	11	4	121
Вторник	54	40	4	–10	16	100
Среда	50	55	0	5	0	25
Четверг	48	50	–2	0	4	0
Пятница	46	44	–4	–6	16	36
Сумма	**250**	**250**	**0**	**0**	**40**	**282**

На практике это означает, что второй рабочий имеет нестабильную производительность труда: в какие-то дни работает не в полную силу, а в какие-то навёрстывает упущенное, что всегда сказывается на качестве продукции. Очевидно, что работодатель предпочтёт взять на место токаря первого рабочего (у которого сумма квадратов отклонений от средней производительности меньше).

Если бы рабочие работали разное количество дней и производили за день в среднем одинаковое число деталей, то стабильность работы каждого из них можно было бы оценить по величине **среднего арифметического суммы квадратов отклонений.** Такая величина называется **дисперсией** (от лат. *dispersus* — рассеянный, разбросанный, рассыпанный) и обозначается буквой D.

Для случайной величины X, принимающей N различных значений и имеющей среднее значение $\overline{X}$, дисперсия находится по формуле

$$D = \frac{\left(X_1 - \overline{X}\right)^2 + \left(X_2 - \overline{X}\right)^2 + \ldots + \left(X_N - \overline{X}\right)^2}{N}. \quad (1)$$

Задача 1. Два токаря вытачивали одинаковые детали. Сведения об их дневной выработке представлены в таблице:

День недели	Дневная выработка	
	первого токаря (X)	второго токаря (Y)
Понедельник	53	52
Вторник	54	46
Среда	49	53
Четверг	48	49
Пятница	46	—

Сравнить стабильности работы токарей.

► Найдём средние значения случайных величин X и Y:

$$\overline{X} = \frac{53 + 54 + 49 + 48 + 46}{5} = \frac{250}{5} = 50, \quad \overline{Y} = \frac{52 + 46 + 53 + 49}{4} = \frac{200}{4} = 50.$$

Очевидно, $\overline{X} = \overline{Y}$. С помощью таблицы найдём суммы квадратов отклонений от средних значений величин X и Y.

День недели	Значение случайной величины		Отклонение от среднего		Квадрат отклонения от среднего	
	X	Y	$X - 50$	$Y - 50$	$(X - 50)^2$	$(Y - 50)^2$
Понедельник	53	52	3	2	9	4
Вторник	54	46	4	−4	16	16
Среда	49	53	−1	3	1	9
Четверг	48	49	−2	−1	4	1
Пятница	46	—	−4	—	16	—
				Сумма:	**46**	**30**

$$D_X = \frac{46}{5} = 9{,}2; \quad D_Y = \frac{30}{4} = 7{,}5. \quad D_X > D_Y.$$

Ответ. Второй токарь работает стабильнее первого. ◁

Если значения случайной величины $X_1, X_2, \ldots, X_k$ повторяются с частотами $M_1, M_2, \ldots, M_k$ соответственно, то дисперсию величины X можно вычислить по формуле

$$D = \frac{\left(X_1 - \overline{X}\right)^2 M_1 + \left(X_2 - \overline{X}\right)^2 M_2 + \ldots + \left(X_k - \overline{X}\right)^2 M_k}{M_1 + M_2 + \ldots + M_k}, \qquad (2)$$

где

$$\overline{X} = \frac{X_1 \cdot M_1 + X_2 \cdot M_2 + \ldots + X_k \cdot M_k}{M_1 + M_2 + \ldots + M_k}.$$

Эту формулу, используя знак суммы Σ, можно записать короче:

$$D = \frac{\Sigma\left(\left(X - \overline{X}\right)^2 M\right)}{\Sigma M}, \text{ где } \overline{X} = \frac{\Sigma(XM)}{\Sigma M}.$$

Задача 2. Случайная величина X имеет распределение по частотам M, представленное в таблице:

X	2	5	6	12
M	1	2	3	1

Найти её дисперсию.

▶ $\overline{X} = \frac{2 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 12 \cdot 1}{1 + 2 + 3 + 1} = \frac{2 + 10 + 18 + 12}{7} = \frac{42}{7} = 6$. Найдём дисперсию по формуле (2):

$$D = \frac{(2-6)^2 \cdot 1 + (5-6)^2 \cdot 2 + (6-6)^2 \cdot 3 + (12-6)^2 \cdot 1}{1 + 2 + 3 + 1} =$$

$$= \frac{16 + 2 + 0 + 36}{7} = \frac{54}{7} \approx 7{,}7. \text{ ◁}$$

Заметим, что размерность дисперсии равна квадрату размерности исследуемой случайной величины.

Устные вопросы и задания

1. Что называется размахом выборки?
2. Что называется отклонением значения случайной величины от среднего?
3. Что такое дисперсия выборки?
4. Что характеризует дисперсия выборки?

Вводные упражнения

1. Найти моду, медиану и среднее значение выборки:
1) 8, 12, 8, 5, 3; 2) 3, 1, 4, 1, 5, 4.

2. Найти моду, медиану и среднее выборки значений случайной величины X, заданной распределением по частотам:

1)

X	2	4	5
M	1	3	2

2)

Y	0,1	0,2	0,3	0,4
M	1	3	3	1

3. Найти разность наибольшего и наименьшего значений выборки:
1) 19 кг, 15 кг, 17 кг, 13 кг, 18 кг;
2) 24 м, 18 м, 21 м, 25 м, 19 м, 23 м.

Упражнения

353. Найти размах выборки:
1) 17, 12, 13, 15, 11, 16, 15, 18, 12;
2) 4, –2, 0, –1, 5, –3, 2, –1.

354. Найти размах выборки значений случайной величины X, заданной частотным распределением:

1)

X	1	2	3	4
M	3	5	4	1

2)

X	5	7	9
M	1	5	8

355. Для каждого элемента выборки: 1) 9; 12; 10; 11; 2) 18; 15; 11; 12, найти отклонение от среднего значения.

356. Известно, что каждое своё значение случайная величина X принимает один раз. Заполнить таблицу:

1)

X	$X-\overline{X}$	$(X-\overline{X})^2$
5		
8		
11		
7		
9		

2)

Y	$Y-\overline{Y}$	$(Y-\overline{Y})^2$
6		
5		
7		
9		
13		

357. Найти дисперсию выборки:

1) 10 см, 12 см, 7 см, 11 см;
2) 16 г, 14 г, 13 г, 17 г;
3) 11 с, 14 с, 11 с, 12 с, 12 с;
4) 5 м, 13 м, 8 м, 12 м, 12 м.

358. Найти дисперсию совокупности значений случайной величины X, заданной частотным распределением:

1)

X	2	3	4	6
M	3	2	2	3

2)

X	−1	2	3	4	5
M	3	1	2	3	1

359. Сравнить дисперсии двух выборок, имеющих одинаковые средние значения:

1) 6, 10, 7, 8, 9 и 8, 9, 5, 10;
2) 5, 12, 7, 8, 18 и 17, 6, 11, 7, 9, 10.

360. Сравнить дисперсии выборок, имеющих разные средние значения:

1) 4, 6, 8, 9, 8 и 6, 8, 10, 12, 9;
2) 6, 3, 4, 8, 9 и 2, 6, 3, 7, 5, 7.

361. Двух футболистов, участвующих во всех играх пяти сезонов одного чемпионата и забивших одинаковое количество голов (см. таблицу), сравнить по стабильности результатов.

Условный номер сезона	1	2	3	4	5
Число голов, забитых 1-м футболистом	18	23	19	17	23
Число голов, забитых 2-м футболистом	19	16	22	23	20

362. Двух футболистов, второй из которых участвовал во всех матчах пяти игровых сезонов, а первый — во всех матчах шести игровых сезонов (см. таблицу), сравнить по средней результативности и стабильности в забивании голов.

Условный номер сезона	1	2	3	4	5	6
Число голов, забитых 1-м футболистом	17	21	20	16	15	19
Число голов, забитых 2-м футболистом	—	17	20	18	21	14

Квартили

Профессор, помните, мы рассматривали в § 24 задачу о фигуристах? Там у одной фигуристки был явно завышенный, а у другой — заниженный балл. Разброс же остальных оценок был незначительный и не сильно отличающийся от средних значений. Вот эти выборки:

$$4{,}7;\quad 4{,}7;\quad \underline{4{,}8;\quad 4{,}8;\quad 4{,}9;\quad 4{,}9;\quad 4{,}9;}\quad 5{,}2;\quad 5{,}6 \qquad (1)$$

$$4{,}2;\quad 4{,}9;\quad \underline{5;\quad 5;\quad 5;\quad 5;\quad 5{,}1;}\quad 5{,}1;\quad 5{,}1. \qquad (2)$$

По данным, находящимся в центральных частях совокупностей (я их подчеркнул), сразу видно, что вторая фигуристка выступила лучше. Может, так и нужно было сравнивать эти выборки?

Действительно, в статистике нередко оценивают выборку не по всем её элементам, а лишь по значениям, находящимся во второй и третьей четвертях упорядоченной совокупности. Деление выборки на части можно выполнять с помощью так называемых квартилей.

А я знаю, что означает однокоренное квартилям слово в музыке. Кварта — это интервал шириной в четыре ступени.

Всё верно. Это слово произошло от латинского quarto — четыре, а квартиль — от похожего латинского слова quarta — четверть. В статистике квартили (их обозначают Q_1, Q_2, Q_3) — это числа, которые находят с помощью значений случайной величины таким образом, что 25 % элементов упорядоченной выборки по величине меньше Q_1, 25 % заключены между Q_1 и Q_2, 25 % — между Q_2 и Q_3, а остальные 25 % превосходят Q_3.

То есть Q_2 совпадает с медианой выборки, а Q_1 и Q_3 — с медианами половинок, на которые Q_2 делит всю совокупность?

Именно так! Например, в выборке (1), содержащей девять элементов,

$$Q_2 = Me = 4{,}9,\ Q_1 = \frac{4{,}7+4{,}8}{2} = 4{,}75;\ \ Q_1 = \frac{4{,}9+5{,}2}{2} = 5{,}05.$$

Можно пользоваться формулами, позволяющими найти место (положение) квартили в ряду:

$$N_{Q_1} = \frac{n+1}{4},\quad N_{Q_2} = \frac{n+1}{2},\quad N_{Q_3} = \frac{n+1}{4}\cdot 3,$$

где n — количество элементов выборки.

Для сравнения упорядоченных выборок часто используют характеристику меры рассеяния элементов центральной части выборки. Она называется квартильным размахом и равна разности Q_3 и Q_1. Например, для выборки (1) $Q_3 - Q_1 = 5{,}05 - 4{,}75 = 0{,}3$.

Если вы найдёте квартильный размах выборки (2), то увидите, что элементы её средней части имеют меньше рассеяния, чем элементы средней части выборки (1). То есть вторая фигуристка имеет все характеристики балловых оценок лучше, чем первая.

Замечу только, что квартильным размахом оценивают в статистике массовые выборки, а не такие, какие рассматриваем мы в учебных целях.

Среднее квадратичное отклонение

Мне кажется не очень удобным меру разброса элементов выборки, имеющих определённую размерность, оценивать величиной, размерность которой отличается от размерности исследуемой величины.

Ты абсолютно права. Поэтому на практике для оценки степени разброса данных используют характеристику той же размерности, что и исследуемая величина X. Эта величина равна арифметическому квадратному корню из дисперсии.

Корень квадратный из дисперсии называют *средним квадратичным отношением* и обозначают греческой буквой σ *(сигма)*. Таким образом $\sigma = \sqrt{D}$.

То есть в ходе решения, например, упражнения 357 (2), в котором я получила ответ $D = 2{,}5$ г^2, можно было найти и $\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{2{,}5 \text{ г}^2} \approx 1{,}6$ г?

Совершенно верно. Однако в маленьких, *учебных* выборках (с которыми вы и имеете дело при первом знакомстве со статистикой) трудно понять, каким образом среднее квадратичное отклонение характеризует всю выборку. Вы пока должны только понимать, что чем меньше дисперсия (и соответственно — среднее квадратичное отклонение), тем плотнее все значения выборки располагаются около среднего значения.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ V

363. На стол бросают два игральных октаэдра (рис. 53), грани каждого из которых занумерованы числами от 1 до 8. Составить таблицу распределения по вероятностям значений случайной величины X — суммы очков на верхних гранях октаэдров.

Рис. 53

364. Для определения соотношений размеров рабочих халатов для женщин, работающих на различных предприятиях города, выявили размеры у 49 случайным образом выбранных женщин крупнейшего комбината и составили таблицу:

48	48	50	54	48	48	54
50	46	50	50	50	48	52
52	48	48	52	54	46	58
46	52	56	50	52	50	50
52	50	48	50	50	44	52
48	42	54	46	56	56	48
44	48	46	48	54	54	46

1) Сколько халатов каждого размера следует шить, если планируется шить по одному халату для каждой из работающих в производстве города 73 500 женщин? 2) На основании данных таблицы построить полигон частот размеров женской одежды. 3) Найти моду, медиану, среднее и размах выборки.

365. Для каждой из трёх совокупностей, представленных таблицами распределения, найти среднее, моду, медиану, размах и дисперсию.

X	1	2	4	6
M	2	1	3	2

Y	−2	0	1	2	3
M	2	3	2	2	1

Z	−5	−4	−2	3
M	1	3	3	1

366. На основании данных таблиц распределения (упражнение 365) построить полигоны относительных частот значений случайных величин X, Y, Z.

ПРАКТИЧЕСКИЕ И ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ

1. В таблице представлено распределение значений величины X — численности рабочих на предприятиях города (сгруппированных по классам) по количеству предприятий (M), имеющих такую численность:

Номер класса	1	2	3	4	5
X (численность рабочих, чел.)	До 100	101—200	201—300	301—400	Более 400
M (число предприятий)	50	35	20	10	5

Представить в виде полигона распределение значений X по частотам.

2. Представить в виде диаграммы информацию, отражённую в таблице внешнеторгового оборота России за период 2000—2006 гг.

Год	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Оборот, млрд долларов США	149,9	155,6	168,3	212,0	280,6	368,9	468,4

3. Распределение по частотам (M) возрастных групп жителей многоквартирного дома (X) представлено в таблице:

X (номер группы)	1	2	3	4	5	6	7	8
Число полных лет	0—10	11—20	21—30	31—40	41—50	51—60	61—70	71—80
M	24	21	38	54	46	30	25	12

Составить таблицу распределения значений случайной величины X по относительным частотам и на её основе построить полигон относительных частот.

4. Распределение по частотам M значений величины X — числа забитых голов каждым из десяти игроков футбольной команды за период соревнований показан в таблице:

X	0	1	2	3
M	4	2	3	1

Найти моду, медиану, среднее, размах и дисперсию представленной в таблице выборки.

5. Продавец обуви имеет возможность выбрать, в каком из двух мест (в точке A или точке B) поставить торговую палатку. В первую очередь его интересует объём продаж, а во вторую — стабильность ежедневных продаж. Продавец провёл исследование: по рабочим дням в январе он торговал в точке A, а в феврале — в точке B. Результаты продаж фиксировались, после чего были составлены две таблицы распределения величины X_A и величины X_B — количества проданных за день пар обуви в точках A и B соответственно:

X_A	1	2	3	4	5
M_A	2	7	7	4	2

X_B	1	2	3	4	6
M_B	3	5	6	5	1

Какой торговой точке следует отдать предпочтение?

6*. Построить диаграмму разброса значений случайных величин X и Y, представленных в таблице, если X — стоимость в рублях килограмма пшеничной муки, Y — стоимость в рублях килограмма хлебобулочных изделий из пшеничной муки в том же году:

Год	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
X	3,7	8,0	8,1	8,5	8,0	11,4	13,1	12,0	12,8	17,4	21,5	19,5
Y	6,4	11,0	12,2	13,7	14,4	18,7	21,6	22,2	25,0	30,7	39,3	39,7

Определить вид корреляции между величинами X и Y.

7*. Связь числа учащихся X, сделавших прививку от гриппа, и числа учащихся Y, заболевших гриппом в каждой из 40 школ района (имеющих примерно одинаковый состав учащихся), отражена в таблице:

X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
20	35	23	31	17	40	24	29
21	35	39	12	21	34	33	17
15	42	19	37	31	21	17	41
18	38	31	22	27	28	28	28
36	16	25	23	30	26	37	15
35	17	20	33	25	23	19	35
40	12	38	14	36	18	34	20
16	40	35	19	23	30	29	27
18	36	26	28	32	20	20	34
24	31	32	19	22	30	38	15

Построить диаграмму разброса значений случайных величин X и Y. Определить вид корреляции между величинами X и Y.

В этой главе вы узнали,

что такое:

— статистика;
— случайная величина;
— таблица распределения значений случайной величины;
— полигон частот; полигон относительных частот;
— генеральная совокупность; выборка;
— репрезентативная выборка;
— выборочный метод;
— центральные тенденции: мода, медиана, среднее;
— меры разброса: размах, отклонение от среднего, дисперсия;

как:

— упорядочивать выборку;
— составлять таблицы частот и относительных частот элементов выборки;
— наглядно представлять распределение значений случайной величины в виде диаграмм и полигонов;
— отличать репрезентативную выборку от нерепрезентативной;
— находить меры центральных тенденций и меры разброса данных в выборке;
— проводить простейшие статистические исследования.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

I уровень

1. Составить таблицы распределения по частотам M и относительным частотам W значений случайной величины X — оценок за контрольную работу учащихся одного класса: 2, 5, 4, 4, 3, 4, 3, 3, 4, 4, 2, 3, 4, 3, 3, 4, 5, 3, 2, 4. Построить полигон частот значений величины X.
2. Найти среднее, моду, медиану и размах выборки значений случайной величины Y: –1, 3, 0, 5, 8, 6, 3, 7, –2, 1.

II уровень

3. С помощью таблицы распределения значений случайной величины X найти моду, медиану, среднее и размах выборки. Составить таблицу относительных частот значений величины X и полигон относительных частот.

X	2	3	4	5	6
M	2	6	7	4	1

4. Найти дисперсию выборки: 23, 29, 25, 26, 22.

III уровень

5. Построить диаграмму разброса значений величин X и Y:

X	Y	X	Y	X	Y
12	6	15	4	14	8
16	5	19	6	20	4
10	9	18	6	13	7
22	4	12	8	22	3
14	6	14	7,5	15	5,5
18	7	16	7	17	6
23	2	10	8	18	4
12	9	20	5	13	8
20	2	15	7,5	24	3
21	3	13	6	17	4

Определить вид зависимости величин X и Y.

6. Пользуясь результатами решения упражнения 330 (таблицей распределения по относительным частотам букв русского алфавита в литературном тексте), провести расшифровку текста (в котором каждое двузначное число соответствует одной букве русского алфавита):

26 18 13 23 17 26 13 21 33 19 17 26
38 11 25 15 25 13 32: 23 17 26 16
18 15 11 31 35 22 31 33 25 13 27 —
36 15 31 35 27 37 31 15 32 20 18 20 19 25 35 27,
23 17 26 16
23 20 19 18 15 14 15 25 13 39 — 36 15 31 35 27
31 33 32 38 13 27 13 23 17 26 16 20 23 35 26 15 —
36 15 31 35 27 32 20 18 16 38 13 27
(38 20 25 34 17 12 13 27).

7. Найти среднее квадратичное отклонение (с точностью до 0,01) выборки значений случайной величины X: 13, 18, 17, 16, 19, 16, 15, 14.

ТЕМЫ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ РАБОТ

1. История немецкой описательной статистики (начиная с XVII в.).
2. История английской школы политических арифметиков.
3. А. Кетле и его вклад в становление теоретической статистики.
4. Вклад в развитие математической статистики английских, итальянских, русских учёных.
5. Переписи населения в России; анализ результатов переписи. Сравнение результатов первой и последней переписей.
6. Компьютерные программы для построения полигонов частот и диаграмм.
7. Корреляция. Виды корреляционной зависимости величин.
8. Выборочные методы исследования значений случайной величины.
9. Дискретные и непрерывные случайные величины.
10. Закон нормального распределения и правило трёх сигм.
11. Статистические исследования в социологии; в биологии.
12. Статистический анализ в гуманитарных сферах деятельности людей.

ГЛАВА VI

Множества. Логика

Вы знакомы с различными числовыми множествами: множеством натуральных чисел, множеством целых чисел и др. В повседневной речи и в разных учебных предметах вы часто используете термин *множество*: множество деревьев в лесу, множество точек координатной плоскости, множество видов насекомых, множество решений неравенства и др.

В конце XIX в. выдающийся немецкий учёный *Г. Кантор (1845—1918)*, внёсший существенный вклад в становление теории множеств, написал: «Под многообразием или множеством я понимаю вообще всякое многое, которое можно мыслить как единое».

Теория множеств оказала большое влияние на развитие всех разделов математики, стала универсальным языком многих отраслей знаний.

С различными конечными и бесконечными множествами, частями множеств, взаимосвязями разных множеств и с множественной символикой вы познакомитесь в этой главе. Заметим, что с некоторой множественной символикой вы уже знакомы. Например, с её помощью вы записывали множество решений неравенства $x \leqslant 3$ в виде $(-\infty; 3]$.

Теоретико-множественные понятия используются в различных логических рассуждениях (иногда в неявном виде). В этой главе вы узнаете о логических принципах конструирования теорем. Научитесь формулировать обратные и противоположные теоремы, выделяя в их формулировках условия и заключения.

Знание правил перехода от одного высказывания к другому, умения построить отрицание высказывания, установить истинность или ложность того или иного высказывания, корректно выстроить цепочку рассуждений или умозаключений — все эти знания и действия необходимы любому грамотному человеку в повседневной жизни и в практической деятельности. С основными понятиями *логики* (науки о правильном мышлении) вы познакомитесь в этой главе и научитесь с их помощью объяснять процессы решения уравнений и неравенств.

§ 26 Множества

Часто в реальной жизни и в научной деятельности приходится рассматривать совокупности однородных элементов как единое целое. Для описания таких совокупностей и изучения их свойств было введено понятие множества. В этом параграфе вы познакомитесь с различными множествами и их частями, с взаимосвязями двух множеств, с символикой, позволяющей кратко записывать отношения между множествами и их элементами.

Нужно вспомнить:

- понятия натуральных чисел, целых чисел, рациональных чисел, действительных чисел;
- понятие системы уравнений;
- решение квадратных уравнений и систем уравнений; решение уравнений, в левой части которых находится произведение нескольких множителей, а в правой части — нуль;
- определения параллелограмма, прямоугольника, квадрата.

1. Множество и его элементы. Подмножества

Понятие **множества** в математике относится к неопределяемым понятиям (подобно, например, понятиям числа и точки). Приведём примеры множеств: 1) множество жителей города; 2) множество точек плоскости; 3) множество натуральных чисел и т. д. Предметы или понятия, из которых состоит множество, называют его **элементами**. Например, число 6 — элемент множества натуральных чисел.

Элементы множества часто обозначают строчными (малыми) буквами, а сами множества — прописными (заглавными) буквами латинского алфавита.

Тот факт, что элемент x является элементом множества A, записывают так: $x \in A$ (читается «x принадлежит A», или «элемент x принадлежит множеству A», или «x содержится в A»). Запись $x \notin A$ означает, что элемент x не принадлежит множеству A.

Например: $42 \in N$, $\frac{2}{3} \notin N$, где N — множество натуральных чисел.

Считается, что множество задано, если перечислены все его элементы или названо **характеристическое свойство**, по которому можно судить, принадлежит или не принадлежит данный элемент рассматриваемому множеству.

Перечисляемые элементы множества принято записывать в фигурных скобках. Например, $\{1; 2; 3; 4; 5\}$ — множество, состоящее из первых пяти натуральных чисел. Это же множество (обозначим его M) можно записать, сформулировав его характеристическое свойство, например, следующим образом:

$$M = \{x:\ x \in N,\ 1 \leqslant x \leqslant 5\}. \qquad (1)$$

В этой записи зафиксировано, что множество M состоит из элементов x, обладающих перечисленными после двоеточия свойствами (двоеточие заменяет слова «таких, что»). Запись (1) читается так: «Множество состоит из элементов x, таких, что каждый из них является натуральным числом и удовлетворяет неравенствам $1 \leqslant x \leqslant 5$».

Задача 1. Перечислить элементы множества

$$A = \{x:\ x \in N,\ 2x^2 - 7x + 3 = 0\}.$$

▶ Решение задачи сводится к перечислению натуральных корней уравнения $2x^2 - 7x + 3 = 0$. Корни этого уравнения $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 3$, из которых только $x_2 \in N$.

Ответ. $\{3\}$ ◁

Если бы в задаче 1 вместо заданного уравнения было уравнение, не имеющее натуральных корней, то в ответе следовало бы указать, что A — пустое множество (не содержит ни одного элемента). Пустое множество обозначается знаком $\varnothing$.

Множества, состоящие из одних и тех же элементов, называют **равными**. Если множества A и B равны, то записывают $A = B$. Например, если

$$A = \{2;\ 0;\ 3\},\ \ B = \{3;\ 2;\ 0\},\ \text{ то }\ A = B.$$

Если каждый элемент множества B является элементом множества A, то множество B называют **подмножеством** (частью) множества A и записывают $B \subset A$ или $A \supset B$. Такая запись читается как «(множество) B содержится в (множестве) A» или «A содержит B».

Например, подмножествами множества $\{a, b, c\}$ являются следующие восемь множеств:

$$\{a\},\ \{b\},\ \{c\},\ \{a, b\},\ \{a, c\},\ \{b, c\},\ \{a, b, c\},\ \varnothing.$$

Отметим, что любое множество является своим подмножеством, а пустое множество считают подмножеством любого множества.

2. Разность множеств. Дополнение до множества

Пусть имеются два множества A и B. Эти множества на рисунке 54 условно изображены частями плоскости, находящимися внутри замкнутых линий и называемыми **кругами Эйлера**. Множество C, элементами которого являются все элементы множества A, не принадлежащие множеству B, называют **разностью** множеств A и B и записывают $C = A \setminus B$ (на рисунке 54 множество C закрашено).

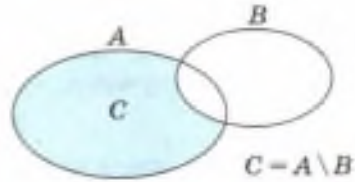


Рис. 54

Например:

1) если $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, b\}$, то $A \setminus B = \{c\}$;
2) если $A = \{a, b, c\}$, $B = \{c, d\}$, то $A \setminus B = \{a, b\}$;
3) если $A = \{a, b\}$, $B = \{c\}$, то $A \setminus B = \{a, b\}$;
4) если $A = \{a, b\}$, $B = \{a, b, c\}$, то $A \setminus B = \varnothing$.

Если $B \subset A$, то разность $A \setminus B$ называют **дополнением** множества B до множества A (на рисунке 55 такое дополнение закрашено).

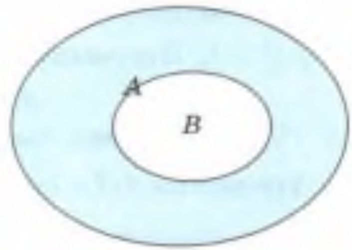


Рис. 55

3. Числовые множества

Школьный курс математики начинается с изучения множества **натуральных чисел** N, т. е. чисел счёта 1, 2, 3, 4, 5, ... Дополняя множество **натуральных чисел** N нулём и числами, противоположными натуральным, получаем множество **целых чисел** Z, т. е. числа 0, ± 1, ± 2, ± 3, ...

Дополняя множество целых чисел обыкновенными дробями, получаем множество **рациональных чисел** Q, т. е. чисел вида $\frac{m}{n}$, где m — целое число, n — натуральное число. При этом любое целое число m является рациональным, так как может быть представлено в виде $\frac{m}{1}$. Напомним, что любое рациональное число может быть записано в виде бесконечной периодической десятичной дроби.

Дополняя множество рациональных чисел иррациональными числами (бесконечными непериодическими десятичными дробями), получаем множество всех **действительных чисел**, которое обозначается буквой R.

Описанный выше процесс расширения понятия числа изображён с помощью кругов Эйлера на рисунке 56.

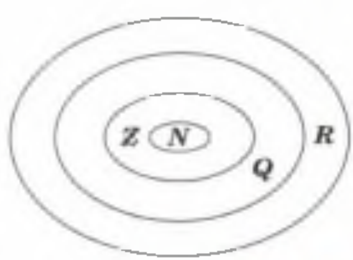
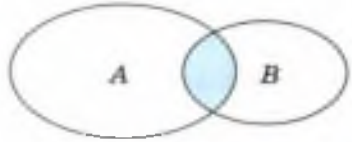


Рис. 56

Используя символику теории множеств, можно сказать, что множество $C = Z \setminus N$ есть дополнение множества натуральных чисел до множества целых чисел, т. е. является множеством чисел 0, -1, -2, -3, ...

4. Пересечение и объединение множеств



$C = A \cap B$

Рис. 57

! Множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат как множеству A, так и множеству B, называют **пересечением** множеств A и B и обозначают $A \cap B$.

Знак $\cap$ называют знаком пересечения. На рисунке 57 пересечение множеств A и B закрашено.

Например:

1) $\{1; 2; 3\} \cap \{1; 3; 4\} = \{1; 3\}$;

2) $\{a; b\} \cap \{c\} = \varnothing$;

3) пересечением лучей CA и BD на рисунке 58 является отрезок BC.

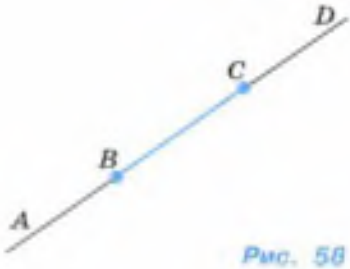


Рис. 58

Если $A \cap B = \varnothing$, то множества A и B называют **непересекающимися**.

Отметим, что знак фигурной скобки при записи систем уравнений и неравенств означает, что при решении систем нужно найти пересечение множеств решений уравнений и неравенств, входящих в систему.

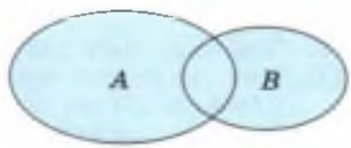
Задача 2. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^2 + x - 2 = 0, \\ x^2 + 2x - 3 = 0. \end{cases}$

▶ $\{1; -2\}$ — множество корней уравнения $x^2 + x - 2 = 0$, $\{1; -3\}$ — множество корней уравнения $x^2 + 2x - 3 = 0$. Множество решений системы есть пересечение множеств корней входящих в неё уравнений, т. е. $\{1; -2\} \cap \{1; -3\} = \{1\}$.

Ответ. $x = 1$. ◁

! Множество, состоящее из всех тех и только тех элементов множеств A и B, которые принадлежат хотя бы одному из этих множеств, называют **объединением** множеств A и B и обозначают $A \cup B$.

Знак $\cup$ называется знаком объединения. На рисунке 59 с помощью кругов Эйлера изображены элементы множеств A и B, а закрашено объединение этих множеств.



$C = A \cup B$

Рис. 59

Например:

1) $\{1; 2\} \cup \{1; 3; 4\} = \{1; 2; 3; 4\}$;

2) $\{a; b; c\} \cup \{d; e\} = \{a; b; c; d; e\}$.

3) объединением лучей CA и BD (см. рис. 58) является прямая AD;

4) множество решений неравенства $x^2-5x+6>0$ можно записать в виде $(-\infty;\ 2)\cup(3;\ +\infty)$.

Задача 3. Решить уравнение

$$(x^2-x-2)(x^2-4)=0. \qquad (2)$$

Уравнение $x^2-x-2=0$ имеет корни -1 и 2, а уравнение $x^2-4=0$ — корни -2 и 2. Множество C корней уравнения (2) — объединение множеств $\{-1;\ 2\}$ и $\{-2;\ 2\}$, т. е. $C=\{-1;\ 2\}\cup\{-2;\ 2\}=\{-2;\ -1;\ 2\}$.
Ответ. $x_1=-2$, $x_2=-1$, $x_3=2$. ◁

Замечание. Решение уравнения (2) сводится к отысканию всех значений x, которые удовлетворяют хотя бы одному из уравнений

$$x^2-x-2=0,\quad x^2-4=0. \qquad (3)$$

В этом случае говорят, что уравнение (2) можно заменить **совокупностью уравнений** (3), которую записывают с помощью квадратной скобки:

$$\left[\begin{array}{l} x^2-x-2=0, \\ x^2-4=0. \end{array}\right.$$

Совокупности уравнений часто записывают перечислением этих уравнений, как это сделано, например, для уравнений (3).

Устные вопросы и задания

1. Привести примеры множеств.
2. Что называют элементами множества?
3. Прочитать запись: $7\in N$; $0{,}3\notin Z$.
4. Какое множество называют пустым?
5. В каком случае множество C является подмножеством множества D?
6. Прочитать запись: $A\subset B$; $P\subset Q$.
7. Сколько подмножеств имеет множество, состоящее из двух элементов; из трёх элементов?
8. Какие множества называют равными?
9. Является ли некоторое множество своим подмножеством? Является ли пустое множество подмножеством некоторого множества?
10. Что называют разностью множеств A и B?
11. В каком случае множество C можно дополнить до множества D? Что называется дополнением множества C до множества D?
12. Описать процесс расширения числовых множеств от множества натуральных до множества действительных чисел?
13. Что называют пересечением двух множеств? Какие два множества называют непересекающимися?

14. Что называют объединением двух множеств?
15. Что означает знак фигурной скобки, стоящей слева от записи двух или более уравнений?
16. Что означает знак квадратной скобки, стоящей слева от записи двух или более уравнений?

Вводные упражнения

1. Заполнить пропуски:

1) $5 = \frac{5}{\ldots}$; 2) $13 = \frac{\ldots}{1}$; 3) $8 = \frac{\ldots}{2}$; 4) $7 = \frac{21}{\ldots}$.

2. Представить в виде конечной или бесконечной периодической десятичной дроби: $\frac{3}{25}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{5}{7}$.

3. Назвать иррациональные числа: 0,(3); $\frac{5}{13}$; $\sqrt{8}$; 7,65; $\frac{\pi}{2}$; $\sqrt{9}$.

4. Разделить объекты на 3 группы по их общим признакам: берёза, муха, ольха, комар, роза, липа, лилия, ясень, оса, мак, гвоздика, бабочка. Дать название каждой группе.

Упражнения

367. Верно ли, что $5 \in M$; $6 \in M$, $\frac{1}{4} \in M$; $-3 \notin M$, если $M = \{2; 4; 6; 8\}$?

368. Пусть A — множество всех натуральных делителей числа 18. Верно ли, что $1 \in A$? $2 \notin A$? $6 \notin A$? $8 \notin A$?

369. Пусть B — множество всех натуральных делителей числа 12. Верно ли, что $12 \in B$? $3 \in B$? $4 \notin B$? $10 \in B$?

370. Записать все подмножества множества:
1) $M = \{7; 8\}$; 2) $N = \{1; 5\}$;
3) $A = \{1; 2; 3\}$; 4) $B = \{4; 5; 6\}$.

371. Найти все элементы множества:
1) $A = \{x\colon\ x \in N,\ 2x < 7\}$;
2) $M = \{a\colon a \in Z, -2\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant 3\}$;
3) $C = \{c\colon\ c^2 - 6c + 9 = 0\}$;
4) $X = \{x\colon\ x^2 + 5x + 6 = 0\}$.

372. На плоскости отмечены точки A и B. Охарактеризовать множество точек M на плоскости, таких, что:
1) $AM = 3$; 2) $AM = MB$.

373. Найти дополнение множества A до множества B, если:
1) $A = \{-6; -4; -2\}$, $B = \{-6; -4; -3; -2\}$;
2) $A = \{-2; 0\}$, $B = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.

374. Найти $A \setminus B$ и $B \setminus A$, если:
1) $A=\{-4; 5; 6\}$, $B=\{-5; -4; -3; -2\}$;
2) $A=\{1; 2; 3\}$, $B=\{-1; 0; 1\}$;
3) $A=\{-1; 0; 1; 2; 3\}$, $B=\{1; 2; 3\}$;
4) $A=\{5; 6; 7\}$, $B=\{-5; 5; -6; 6\}$.

375. Пусть N — множество натуральных чисел, Z — множество целых чисел, Q — множество рациональных чисел, R — множество действительных чисел. Найти: 1) $R \setminus Q$; 2) $Z \setminus N$.

376. Найти $A \cap B$ и $A \cup B$, если:
1) $A=\{a; b; c\}$, $B=\{a; b\}$; 2) $A=\{a; b; c\}$, $B=\{c; d\}$;
3) $A=\{a; b\}$, $B=\varnothing$; 4) $A=\{a\}$, $B=\{c; d; e\}$.

377. Найти $A \cap B$ и $A \cup B$ для множеств, указанных в упражнении 374.

378. Найти пересечение и объединение числовых отрезков $[2; 7]$ и $[4; 9]$.

379. Найти пересечение и объединение числовых отрезков $[6; 8]$ и $[5; 7]$.

380. Записать пересечение и объединение множества корней уравнения $x^2-4x-12=0$ с множеством корней уравнения $x^2-5x-14=0$.

381. Записать множество A натуральных делителей числа 18 и множество B натуральных делителей числа 45. Найти $A \cap B$. Как называется наибольшее из чисел, принадлежащих множеству $A \cap B$?

382. Пусть C — множество натуральных чисел, кратных числу 18, а D — множество натуральных чисел, кратных числу 45. Охарактеризовать множество $C \cap D$. Как называется наименьшее из чисел, принадлежащее множеству $C \cap D$?

383. Найти $A \cup B$, если $A=\{x: |x|<1,\ x \in Z\}$ и $B=\{x: |x-1|<2,\ x \in N\}$.

384. Найти $A \cup B$, если $A=\{x: x^2-6x+9 \leqslant 0\}$ и $B=\{x: |x| \leqslant 1,\ x \in Z\}$.

385. Найти $A \cup B \cup C$ и $A \cap B \cap C$, если:
1) $A=\{-2; -1; 0; 1; 2; 3\}$, $B=\{-1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$, $C=\{0; 1; 2; 3; 4; -1; -2; -3\}$;
2) $A=\{x: x \leqslant 1\}$, $B=\{x: -1 \leqslant x \leqslant 1,\ x \in Z\}$, $C=\{x: -2 \leqslant x \leqslant 0\}$.

386. Пусть A_1 — множество всех квадратов, A_2 — множество всех прямоугольников, A_3 — множество всех ромбов, A_4 — множество всех параллелограммов. Найти:
1) $A_1 \cap A_2$; 2) $A_1 \cup A_2$; 3) $A_2 \cap A_3$;
4) $A_3 \cap A_4$; 5) $A_3 \cup A_4$; 6) $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$;
7) $A_4 \cap A_3 \cap A_2 \cap A_1$.

Классификация

Это интересно

Помните, при изучении случайных величин мы говорили о том, что схожие элементы можно сравнивать по разным признакам. Например, розы можно сравнивать по цвету; по величине бутона. Людей можно сравнивать, например, по группе крови. При таком сравнении вся популяция людей распределится по четырём классам: имеющие I группу, II группу, III группу, IV группу крови.

А если я захочу сравнивать людей по резус-фактору крови, то они образуют два класса: имеющие положительный и имеющие отрицательный резус?

Правильно. При этом вы, конечно, понимаете, что при классификации людей, например, по группе крови конкретный человек не может иметь более одной группы крови, но одну он имеет обязательно. На языке теории множеств это означает следующее:

При классификации множество элементов генеральной совокупности делится на подмножества, причём эти подмножества не пересекаются (точнее: пересечение любых двух подмножеств — пустое множество), а объединение всех этих подмножеств равно исходному множеству.

Приведите, пожалуйста, интересный пример классификации схожих объектов по разным признакам (основаниям).

Например, все автомобили можно классифицировать по таким основаниям: 1) по принадлежности к грузовым или пассажирским; 2) по числу ведущих колёс; 3) по типам двигателя; 4) по параметрам пробега и т. д.

Отличный пример. Только поправлю тебя в названии первой классификации. Например, машины скорой помощи или гоночные машины не относятся ни к грузовым, ни к пассажирским. Упустил целое подмножество автомобилей, которое условно можно назвать специальными.

А мой пример из геометрии. Например, все треугольники можно классифицировать: 1) по величинам углов (тогда множество всех треугольников разобьётся на 3 класса: остроугольные, прямоугольные и тупоугольные треугольники); 2) по соотношению сторон (равносторонние; равнобедренные, не являющиеся равносторонними; разносторонние).

Тоже очень хороший пример. Попробуйте самостоятельно дать классификацию: 1) линейных и квадратных уравнений по числу их корней; 2) взаимного расположения двух прямых. А также придумайте, по каким основаниям можно классифицировать: товары; ценные бумаги; сотовые телефоны.

Шаг вперёд

Булеан

При изучении параграфа вы составляли все подмножества множества из двух элементов (их оказалось 4), все подмножества множества из трех элементов (их оказалось 8). Можете ли вы высказать предположение о том, сколько подмножеств имеет множество из n элементов?

Я ещё могу добавить, что у пустого множества (т. е. у множества, не имеющего ни одного элемента) всего одно подмножество — оно само; у множества, состоящего из одного элемента, подмножеств два: оно само и пустое множество.

Закономерность прослеживается. Выдвину гипотезу: у *множества M_n, содержащего n элементов, число подмножеств равно 2^n.*

Твоя гипотеза верна. Замечу, что множество всех подмножеств конкретного множества называют его *булеаном*. То есть мы хотим найти число элементов булеана, составленного из подмножеств множества M_n. Докажем наше предположение методом математической индукции.

1) Если $n=0$, т. е. $M_0=\varnothing$, то у него только одно подмножество — оно само и интересующее нас число равно $2^0=1$. При $n=1$, как мы уже говорили, подмножеств 2, т. е. 2^1.

2) Пусть наше предположение верно для некоторого $n=k$, т. е. пусть любое множество M_k, содержащее k элементов, имеет 2^k подмножеств. Докажем, что предположение верно и для $n=k+1$, т. е. что любое множество M_{k+1}, состоящее из $k+1$ элементов, имеет 2^{k+1} подмножеств.

Удалим временно из множества M_{k+1} один его произвольный элемент a. Получим множество $M_{k+1}\setminus\{a\}$, состоящее из k элементов. По предположению у этого множества 2^k подмножеств, каждое из которых, очевидно, является и подмножеством множества M_{k+1}. Заметим, что добавление к каждому из полученных подмножеств временно удалённого элемента a приводит к получению нового подмножества множества M_{k+1}. Тем самым образуется ещё 2^k подмножеств и общее число подмножеств множества M_{k+1} становится равным $2^k+2^k=2^k(1+1)=2^k\cdot 2=2^{k+1}$, что и требовалось доказать.

Таким образом, мы доказали, что любое множество, состоящее из n элементов ($n\geqslant 0$), имеет 2^n подмножеств.

§ 27 Высказывания. Теоремы

Мы часто произносим различные фразы, высказывания. Истинность или ложность отдельных высказываний очевидна, а других не очевидна. Раздел математики, называемый *логикой*, занимается установлением истинности высказываний, изучением взаимосвязей истинных и ложных высказываний, нахождением множества истинности предложения с переменной и др.
В этом параграфе вы познакомитесь с языком и символикой логики, поймёте принципы конструирования различных высказываний, в частности прямых и обратных теорем.

Нужно вспомнить:

- понятия и символы объединения и пересечения множеств;
- обозначения: принадлежности элемента множеству; пустого множества; подмножества; разности множеств;
- понятия множеств натуральных, целых, рациональных и действительных чисел; взаимосвязь этих множеств (изображение этой взаимосвязи с помощью кругов Эйлера);
- формулировки основных теорем алгебры и геометрии.

1. Высказывания

Любое утверждение, о котором имеет смысл говорить, что оно истинно (верно) или ложно (неверно), называется **высказыванием**.

Например, высказываниями являются следующие утверждения:
1) «число -30 является целым числом» (это утверждение истинно);
2) «Волга впадает в Каспийское море» (истинное утверждение);
3) «$5 > 7$» (ложное утверждение).

Из каждого высказывания υ можно получить новое высказывание, отрицая его, т. е. утверждая, что высказывание υ не выполняется. Его называют **отрицанием** высказывания υ и обозначают $\bar{\upsilon}$ (читается «не υ» или «υ с чертой»).

Например, для высказывания υ: «число 7 чётное», высказывание $\bar{\upsilon}$ можно сформулировать следующим образом: «число 7 нечётное» или «число 7 не является чётным». Заметим, что здесь высказывание υ — ложно, а высказывание $\bar{\upsilon}$ — истинно. И в других случаях, если одно из высказываний υ или $\bar{\upsilon}$ истинно, то другое — ложно. В таблице приведены примеры высказываний υ и их отрицаний $\bar{\upsilon}$, запись которых использует математическую символику.

v	$\bar{v}$
$4+6=10$ (истинно)	$4+6\neq 10$ (ложно)
$2>3$ (ложно)	$2\leqslant 3$ (истинно)
$-10\in Z$ (истинно)	$-10\notin Z$ (ложно)
$Z\subset Q$ (истинно)	$Z\not\subset Q$ (ложно)
$Z\cap N=N$ (истинно)	$Z\cap N\neq N$ (ложно)

2. Предложения с переменными

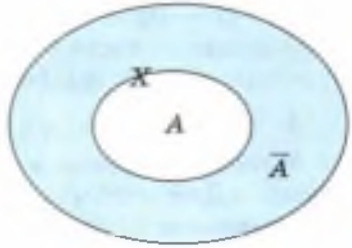
Математика часто использует утверждения, зависящие от переменной. Например: 1) $x>0$; 2) $x\in N$. Очевидно, что для одних значений x в этих примерах сформулированные утверждения истинны, а для других ложны.

Утверждения подобного рода называют **предложениями с переменной** x и обозначают $p(x)$, а в случае зависимости от двух переменных x и y предложения обычно обозначают $p(x; y)$. Для каждого предложения с переменной принято указывать, на каком множестве X оно задано. Если же понятно, о каком множестве идёт речь, то его обычно не указывают. Например, предложение $p(x)$: $3x^2+5x-2=0$ является уравнением, корень которого предполагается искать на множестве действительных чисел (его корнями являются $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=-2$). Если бы требовалось, например, найти только целочисленные корни этого уравнения, то задача была бы сформулирована следующим образом: $3x^2+5x-2=0$, $x\in Z$ (решением этого уравнения является $x=-2$).

Множество X, на котором задано предложение $p(x)$, можно разбить на два подмножества: одно содержит те элементы X, для которых предложение $p(x)$ истинно (его называют **множеством истинности**), другое — для которых $p(x)$ ложно. Если первое из подмножеств обозначить A, то второе будет множеством $\bar{A}$. Ясно, что каждое из множеств A и $\bar{A}$ является дополнением другого до множества X. Например, множеством истинности A неравенства $x^2-1<0$ является интервал $(-1; 1)$, а множеством $\bar{A}$ является дополнение этого интервала до множества всех действительных чисел: $(-\infty; -1]\cup[1; +\infty)$.

Предложение $\overline{p(x)}$ (определённое на множестве X) называют **отрицанием** предложения $p(x)$ (определённого на том же множестве X), если оно обращается в истинное (ложное) высказывание для тех и только тех значений x, для которых $p(x)$ ложно (истинно).

Если A — множество истинности предложения $p(x)$, то $\overline{A}$ будет множеством истинности предложения $\overline{p(x)}$. На рисунке 60 с помощью кругов Эйлера показано соотношение между элементами множеств X, A и $\overline{A}$.



$A \cup \overline{A} = X, A \cap \overline{A} = \varnothing$

Рис. 60

3. Символы общности и существования

Если в математике хотят сказать, что некоторое предложение $p(x)$ верно для всех $x \in X$, то записывают так: $(\forall x)\, p(x)$.

Знак общности $\forall$ — перевёрнутая первая заглавная буква английского слова *All* (все) заменяет слова «для любого», «для всех», «для каждого».

Если хотят сказать, что предложение $p(x)$ истинно хотя бы для одного значения $x \in X$, то записывают $(\exists x)\, p(x)$.

Знак существования $\exists$ — зеркально отражённая первая заглавная буква английского слова *Exists* (существует) — заменяет слова «существует», «найдётся», «хотя бы один».

Каждое из высказываний $(\forall x)\, p(x)$ и $(\exists x)\, p(x)$ может быть либо истинным, либо ложным.

Например:

1) если предложением $p(x)$ является неравенство $|x| \geqslant 0$, то истинными будут как высказывание $(\forall x)\, p(x)$, так и высказывание $(\exists x)\, p(x)$; 2) если предложением $p(x)$ является неравенство $x^2 \geqslant 1$, то $(\exists x)\, p(x)$ — истинное высказывание, так как, например, при $x = 2$ предложение $p(x)$ истинно: $2^2 \geqslant 1$; высказывание же $(\forall x)\, p(x)$ ложно, так как, например, при $x = 0{,}5$ предложение $p(x)$ ложно.

Отметим, что для опровержения высказывания вида $(\forall x)\, p(x)$ достаточно привести **контрпример**, т. е. пример невыполнения высказывания $p(x)$ хотя бы для одного $x \in X$.

Гипотезы (предположения) могут рассматриваться как предложения с переменными. Доказательство гипотез осуществляется разными способами, а их опровержение часто происходит с помощью контрпримера.

История математики знает случай выдвижения гипотезы о том, что формулой $n^2 + n + 41$ при любом $n \in N$ задаётся простое число. Действительно, при $n = 1$; 2; 3; 4; 5 и др. значения выражения

n^2+n+41 — простые числа. Но, например, при $n=41$ значение этого выражения — составное число. Значение $n=41$ — контрпример, опровергающий выдвинутую гипотезу о формуле простого числа.

4. Прямая и обратная теоремы

Многие теоремы в математике формулируются по следующей схеме: «Для любого элемента $x \in X$ из предложения $p(x)$ следует предложение $q(x)$» или коротко:

$$(\forall x)\, p(x) \Rightarrow q(x), \ \ x \in X, \tag{1}$$

где *знак следования* $\Rightarrow$ заменяет слова «откуда следует», «тогда», «если..., то...».

Часто запись (1) заменяют более короткой:

$$p(x) \Rightarrow q(x). \tag{2}$$

Предложение $p(x)$ в утверждении (1) называется *условием теоремы*, а предложение $q(x)$ — *заключением теоремы*.

Рассмотрим несколько примеров.

1) В теореме Пифагора условие $p(x)$ можно сформулировать так: «x — прямоугольный треугольник»; заключение $q(x)$: «В треугольнике x сумма квадратов двух меньших сторон равна квадрату третьей стороны».

Используя терминологию логики, теорему Пифагора можно сформулировать, например, так: «Если некоторый треугольник прямоугольный, то сумма квадратов двух его меньших сторон равна квадрату третьей стороны».

2) Теорема «Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке» является краткой (удобной для заучивания) формулировкой теоремы «Если фигура x — треугольник, то биссектрисы его углов пересекаются в одной точке». Здесь условием теоремы является предложение: «Фигура x — треугольник (любой треугольник)», а заключением является предложение: «Биссектрисы углов фигуры x пересекаются в одной точке».

3) В теореме Виета «Если x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2+px+q=0$, то справедливы формулы $x_1+x_2=-p$, $x_1 \cdot x_2=q$» условием является предложение «x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $x^2+px+q=0$». Заключением теоремы является предложение «$x_1+x_2=-p$, $x_1 \cdot x_2=q$».

Теоремы $p(x) \Rightarrow q(x)$ и $q(x) \Rightarrow p(x)$ называются **взаимно обратными теоремами**. Иногда одну из этих теорем называют **прямой**, а другую — **обратной**. Ясно, что любую из двух взаимно обратных теорем можно принять за прямую.

Из определения взаимно обратных теорем следует, что если в формулировке прямой теоремы поменять местами условие и заключение, то получится формулировка обратной теоремы. Например:

1) теорему, обратную теореме Пифагора, можно сформулировать так: «Если сумма квадратов двух сторон треугольника равна квадрату третьей стороны, то этот треугольник прямоугольный»;

2) в теореме Виета, поменяв местами условие и заключение, имеем условие «$x_1 + x_2 = -p$, $x_1 x_2 = q$» и заключение «x_1 и x_2 корни квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$».

Традиционно теорема, обратная теореме Виета, формулируется так: «Если числа x_1, x_2, p и q таковы, что $x_1 + x_2 = -p$ и $x_1 x_2 = q$, то числа x_1 и x_2 являются корнями уравнения $x^2 + px + q = 0$».

Важно знать, что среди пар взаимно обратных теорем обе могут быть верными (как, например, для теорем Виета и Пифагора); обе могут быть неверными; одна из них может быть верной, а другая — неверной.

Например:

1) прямая теорема «Если натуральное число оканчивается цифрой 0, то оно делится на 10» и ей обратная «Если натуральное число делится на 10, то оно оканчивается цифрой 0» являются верными (истинными);

2) неверными являются и прямая теорема «Если многоугольник x — треугольник, то сумма его углов равна 360°» и ей обратная «Если сумма углов многоугольника x равна 360°, то этот многоугольник — треугольник»;

3) теорема «Диагонали любого ромба взаимно перпендикулярны» верна; обратная же ей теорема «Если диагонали четырёхугольника взаимно перпендикулярны, то этот четырёхугольник является ромбом» неверна, так как можно привести пример четырёхугольника с взаимно перпендикулярными диагоналями, не являющегося ромбом (рис. 61).

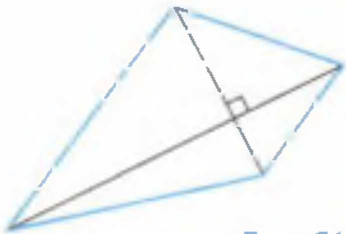


Рис. 61

5*. Необходимые и достаточные условия

Если теорема $p(x) \Rightarrow q(x)$ верна, то её условие $p(x)$ называют **достаточным условием** для заключения $q(x)$, а заключение $q(x)$ называют **необходимым условием** для $p(x)$.

Например, теорема «Диагонали ромба взаимно перпендикулярны» верна, значит, её условие $p(x)$ «Четырёхугольник x — ромб» является достаточным условием для заключения $q(x)$ «Диагонали четырёхугольника x взаимно перпендикулярны». Таким образом, для того чтобы диагонали четырёхугольника были перпендикулярны, достаточно, чтобы этот четырёхугольник был ромбом. Заключение этой теоремы $q(x)$ является необходимым для условия этой теоремы $p(x)$. Можно сказать, что, для того чтобы четырёхугольник был ромбом, необходимо, чтобы его диагонали были перпендикулярны.

Если верна не только теорема $p(x) \Rightarrow q(x)$, но и ей обратная $q(x) \Rightarrow p(x)$, то $p(x)$ является **необходимым и достаточным условием** для $q(x)$, а $q(x)$ является необходимым и достаточным условием для $p(x)$.

Например, верными являются как теорема Пифагора, так и её обратная, поэтому сформулировать её можно так: «Для того чтобы треугольник был прямоугольным, необходимо и достаточно, чтобы сумма квадратов двух его сторон была равна квадрату третьей».

Заметим, что слова «необходимо и достаточно» в формулировках теорем часто заменяют словами «тогда, и только тогда», «в том, и только в том случае», «те, и только те».

6*. Противоположные теоремы

Теоремы $p(x) \Rightarrow q(x)$ и $\overline{p(x)} \Rightarrow \overline{q(x)}$ называются взаимно **противоположными.**

Например, для теоремы «Сумма внутренних углов треугольника равна 180°» противоположной будет теорема, в которой вместо условия и заключения будут сформулированы их отрицания: «У многоугольника, не являющегося треугольником, сумма внутренних углов отлична от 180°». Обе эти теоремы верны.

Бывают случаи, когда одна из взаимно противоположных теорем верна, а другая нет. Например, для теоремы о перпендикулярности диагоналей ромба противоположная ей теорема не верна.

Если теорема $q(x) \Rightarrow p(x)$ обратная для теоремы $p(x) \Rightarrow q(x)$, то теорема $\overline{q(x)} \Rightarrow \overline{p(x)}$ называется **противоположной обратной**.

Известно, что пары теорем: 1) $p(x) \Rightarrow q(x)$ и $\overline{q(x)} \Rightarrow \overline{p(x)}$ (прямая и противоположная обратной); 2) $q(x) \Rightarrow p(x)$ и $\overline{p(x)} \Rightarrow \overline{q(x)}$ (обратная и противоположная) — всегда одновременно истинны или ложны.

Например:

— **прямая** теорема «Биссектрисы внутренних углов треугольника пересекаются в одной точке» *истинна*;

— **обратная** ей теорема «Если биссектрисы внутренних углов многоугольника пересекаются в одной точке, то этот многоугольник является треугольником», *ложна* (например, у ромба, являющегося четырёхугольником, биссектрисы внутренних углов пересекаются в одной точке);

— **противоположная** теорема «Если многоугольник не является треугольником, то биссектрисы его внутренних углов не пересекаются в одной точке» *ложна* (контрпример — ромб);

— теорема, **противоположная обратной**, «Если биссектрисы внутренних углов многоугольника не пересекаются в одной точке, то этот многоугольник не является треугольником», *истинна*.

Нередко доказательство прямой теоремы бывает затруднительно (в этом учащиеся убедились в курсе планиметрии). Тогда прибегают к доказательству **методом от противного**, которое заключается в доказательстве вместо прямой теоремы $p(x) \Rightarrow q(x)$ теоремы, противоположной обратной $\overline{q(x)} \Rightarrow \overline{p(x)}$.

Устные вопросы и задания

1. Какое утверждение называют высказыванием?
2. Привести пример высказывания и его отрицания.
3. Какие утверждения называют предложениями с переменной (с переменными). Привести пример предложения с переменной.
4. Что называют множеством истинности предложения с переменной?
5. Как связаны множество истинности A предложения $p(x)$ и множество истинности $\overline{A}$ предложения $\overline{p(x)}$, если $p(x)$ и $\overline{p(x)}$ определены на множестве X?
6. Что обозначает запись $(\forall x)\, p(x)$; $(\exists x)\, p(x)$?
7. Каким способом можно опровергнуть высказывание вида $(\forall x)\, p(x)$?
8. Прочитать запись: $(\forall x)\, p(x) \Rightarrow q(x)$, $x \in X$; $(\exists x)\, p(x) \Rightarrow q(x)$, $x \in X$.
9. Как в символической записи теоремы $p(x) \Rightarrow q(x)$ называется предложение $p(x)$; предложение $q(x)$?
10. Как называют теорему вида $q(x) \Rightarrow p(x)$ по отношению к теореме вида $p(x) \Rightarrow q(x)$?

11*. Пояснить в чём состоит смысл доказательства теоремы методом от противного.

Вводные упражнения

1. Найти дополнение множества M до множества всех действительных чисел, если:
   1) $M = \{x: x \leqslant 3,\ x \in R\}$; 2) $M = \{x: x > 5,\ x \in R\}$.
2. Найти сумму и произведение корней уравнения:
   1) $x^2 - 7x + 12 = 0$; 2) $x^2 + x - 12 = 0$.
3. Найти $x_1 + x_2$ и $x_1 \cdot x_2$, если известно, что x_1 и x_2 — корни уравнения:
   1) $x^2 + mx - 6 = 0$; 2) $x^2 - 3x + n = 0$.
4. В прямоугольном треугольнике ABC угол ACB — прямой. Найти:
   1) AB, если $AC = 4$ см, $BC = 3$ см;
   2) AC, если $AB = 7$ см, $BC = 3$ см.
5. Сформулировать признак делимости натурального числа на: 3; 5; 9; 10; 4; 8.

Упражнения

387. Сформулировать высказывание $\bar{v}$, если известно высказывание v:

1) $7 = 7$; 2) $45 \geqslant 3$;
3) любое натуральное число является целым числом;
4) у Земли только один естественный спутник.

388. Найти множество истинности предложения:

1) n — натуральный делитель числа 42;
2) k — натуральное число, кратное числу 5, но меньшее, чем 30;
3) $-5 < x < 1$, $x \in Z$; 4) $\begin{cases} x^2 - 2x + 1 \leqslant 0, \\ x > 0. \end{cases}$

389. Найти множество истинности для предложения $\overline{p(x)}$, если дано предложение $p(x)$:

1) $-4 \leqslant x \leqslant 2$; 2) $x \in (-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$;
3) $-x^2 - 3x + 4 = 0$; 4) $x^2 + 9 \leqslant 0$.

390. Для каждого из предложений $p(x)$:

1) $\sqrt{x} = 6$; 2) $|x| > -3$; 3) $x^2 + 8 = 0$; 4) $x^2 - 7 > 0$

определить, истинным или ложным является высказывание $(\forall x)\, p(x)$; $(\exists x)\, p(x)$.

391. Определить, истинным или ложным является высказывание $(\forall x)\, p(x)$; $(\exists x)\, p(x)$ для каждого из предложений $p(x)$:

1) треугольник x — равнобедренный;
2) параллелограмм x является квадратом;
3) центральный угол x равен дуге, на которую он опирается;
4) сумма углов выпуклого четырёхугольника равна 360°.

392. Выделить условие и заключение теоремы; сформулировать теорему, обратную данной:

1) если сумма цифр числа делится на 3, то и само число делится на 3;
2) каждый член арифметической прогрессии (начиная со второго) равен полусумме соседних с ним членов.

393. Сформулировать теорему, обратную данной. Истинной или ложной является каждая из этих теорем?

1) сумма противоположных углов четырёхугольника, вписанного в окружность, равна 180°;
2) если две параллельные прямые пересечены секущей, то образовавшиеся накрест лежащие углы равны;
3) около любого прямоугольника можно описать окружность;
4) диагональ параллелограмма делит его на два равных треугольника.

394. Привести контрпример, опровергающий утверждение:
1) в любой четырёхугольник можно вписать окружность;
2) для любого треугольника сумма квадратов двух его сторон равна квадрату третьей стороны;
3) сумма чисел с разными знаками есть число отрицательное;
4) в равнобедренном треугольнике один угол тупой.

395. Доказать или опровергнуть высказывание:
1) сумма двух последовательных натуральных чисел есть число чётное;
2) сумма трёх последовательных натуральных чисел делится на 3.

396. Заменить многоточие словами «необходимо», «достаточно» или «необходимо и достаточно» таким образом, чтобы полученное утверждение было истинным:
1) для того чтобы сумма двух натуральных чисел делилась на 2, ..., чтобы числа были чётными;
2) для того чтобы число делилось на 9, ..., чтобы сумма его цифр делилась на 9;
3) для того чтобы числа x_1 и x_2 были корнями уравнения $x^2+px+q=0$, ..., чтобы $x_1x_2=q$.

Шаг вперёд

Логические связки и таблица истинности

Запись многих высказываний в логике осуществляется с помощью специальных знаков, часть из которых вам уже знакома. Это так называемые *кванторы*: $\forall$ — общности («для всех») и $\exists$ — существования («существует», «найдётся»). Знак следования $\Rightarrow$ (заменяющий слова «если..., то...») называется *импликацией*. Знак $\neg$ или черта над символом высказывания обозначают отрицание высказывания («не») и называется *инверсией*.

А с какими знаками мы ещё не знакомы?

Вы не знакомы ещё с двумя основными *логическими связками* (иногда их называют *операциями*): $\wedge$ — *конъюнкцией* (заменяющей союз «и») и $\vee$ — *дизъюнкцией* (заменяющей союз «или»). С их помощью образуют *сложные* высказывания. Допустим, даны высказывание $p(x)$: «Число x делится на 2» и высказывание $q(x)$: «Число x делится на 3». Тогда высказывание $p(x)\wedge q(x)$ будет таким: «Число x делится и на 2, и на 3». Высказывание $p(x)\vee q(x)$ будет следующим: «Число x делится хотя бы на одно из чисел 2 или 3» или коротко: «Число x делится на 2 или на 3».

В логике высказываний исследуется истинность или ложность конъюнкции и дизъюнкции двух высказываний в зависимости от того, какими (истинными или ложными) являются сами высказывания. Например, высказывание $p \wedge q$ истинно тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания p и q; если хотя бы одно из них ложно, то ложна и их конъюнкция.

Я проверил справедливость вашего утверждения о конъюнкции высказываний, связанных с делимостью числа x и на 2, и на 3. А как ведёт себя дизъюнкция двух высказываний?

Предлагаю вам рассмотреть так называемую *таблицу истинности*, в которой показано — истинным (и) или ложным (л) будет сконструированное сложное высказывание (в зависимости от истинности составляющих его высказываний):

	p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$\overline{p}$
1	и	и	и	и	и	л
2	и	л	л	и	л	
3	л	и	л	и	и	и
4	л	л	л	л	и	

Я хочу убедиться в справедливости этой таблицы, беря в качестве высказываний p и q, например, простейшие числовые неравенства (верные и неверные): $3 > 1$, $3 < 1$, $5 > 2$, $5 < 2$ и т. п.

Сделаем проверку. Например, высказывание

p: «$3 > 1$» (истинно), q: «$5 < 2$» (ложно),

тогда:

$p \wedge q$: «$3 > 1$ и $5 < 2$» (ложно);

$p \vee q$: «$3 > 1$ или $5 < 2$» (истинно);

$p \Rightarrow q$: «если $3 > 1$, то $5 < 2$» (ложно);

$\overline{p}$: «$3 \not> 1$» или «$3 \leqslant 1$» (ложно).

Результаты совпали с данными второй строки таблицы.

Профессор, я вижу связь конъюнкции с пересечением множеств истинности двух высказываний, а дизъюнкции — с их объединением.

Ты абсолютно права. Можно, например, систему уравнений рассматривать как конъюнкцию высказываний — уравнений системы, а совокупность уравнений — как их дизъюнкцию. Добавлю, что слово «конъюнкция» произошло от лат. *conjunctio* — связь, союз, а «дизъюнкция» — от лат. *disjunctio* — различие.

§ 28 Следование и равносильность

В предыдущем параграфе вы познакомились с различными высказываниями. Знаете, что такое множество истинности предложения с переменной. Рассмотрели примеры следования одного предложения из другого. В этом параграфе на примерах корней уравнений и решений неравенств (как множеств истинности соответствующих уравнений и неравенств) вы познакомитесь с понятиями равносильных уравнений и неравенств, а также с уравнениями и неравенствами-следствиями.

Нужно вспомнить:

- понятия множества и его элементов, подмножества данного множества;
- понятия объединения и пересечения множеств, дополнения одного множества до другого;
- понятия системы уравнений и совокупности уравнений с точки зрения теории множеств;
- понятия корней уравнения и решений неравенства;
- формулы сокращённого умножения;
- понятия предложения с переменной и множества истинности предложения с переменной.

1. Следование и равносильность

С понятием следования одного предложения из другого вы познакомились в предыдущем параграфе, когда условие и заключение теоремы рассматривали как определённые предложения с переменными.

! Предложение $q(x)$ является **следствием** предложения $p(x)$, если всегда, когда истинно предложение $p(x)$, оказывается истинным и предложение $q(x)$.

Таким образом, если $q(x)$ — следствие предложения $p(x)$, то **множество истинности предложения $p(x)$ являются подмножеством множества истинности предложения $q(x)$.** Если множество истинности предложения $p(x)$ обозначить P, а множество истинности предложения $q(x)$ обозначить Q, то $P \subset Q$. Тот факт, что $q(x)$ является следствием $p(x)$, записывают так:

$$p(x) \Rightarrow q(x).$$

Заметим, что если множества истинности предложений $p(x)$ и $q(x)$ совпадают, то каждое из них является следствием другого. Рассмотрим примеры:

1) Предложение $q(x)$: «число x делится на 2» является следствием предложения $p(x)$: «число x делится на 6», так как любое число, делящееся на 6, делится и на 2.

2) Предложение $q(x)$: «$x^2=9$» является следствием предложения $p(x)$: «$x=3$», так как $P=\{3\}$, а $Q=\{-3; 3\}$, т. е. $P\subset Q$.

! Предложения $p(x)$ и $q(x)$, заданные на одном и том же множестве, называются **равносильными**, если $p(x)\Rightarrow q(x)$ и $q(x)\Rightarrow p(x)$.

Множества истинности равносильных предложений $p(x)$ и $q(x)$ совпадают. Тот факт, что предложения $p(x)$ и $q(x)$ равносильны, записывают так:

$$p(x)\Leftrightarrow q(x).$$

Примеры равносильных предложений:

1) $p(x)$: «Натуральное число x делится на 3»; $q(x)$: «Сумма цифр натурального числа x делится на 3»;

2) $p(x)$: «$x^2\leqslant 4$»; $q(x)$: «$|x|\leqslant 2$», так как множеством истинности и предложения $p(x)$, и предложения $q(x)$ является отрезок $[-2; 2]$.

2. Равносильные уравнения и системы уравнений. Уравнения-следствия

Уравнения и системы уравнений являются предложениями с переменными.

! **Равносильными уравнениями** называют уравнения, имеющие одинаковые множества истинности. Иначе говоря, **уравнения равносильны, если множества их корней совпадают.**

Например, равносильными являются уравнения:

1) $\sqrt{x^2}=5$ и $|x|=5$, так как $\{-5; 5\}$ — множество корней каждого из них;

2) $x^4=-1$ и $\sqrt{x}=-3$, так как множество корней каждого из них — пустое множество (оба уравнения не имеют корней).

Приведём примеры преобразований, приводящих к равносильным уравнениям, применимость которых мы обосновывали ранее (ссылаясь на свойства верных числовых равенств).

1) Любое слагаемое можно переносить из одной части уравнения в другую, изменив его знак на противоположный.

Например, уравнения $3x^2-5x=7$ и $3x^2-5x-7=0$ равносильны.

2) Обе части уравнения можно умножать (или делить) на одно и то же, отличное от нуля, число или на выражение, не обращающееся в нуль ни при каких значениях неизвестных.

Например, равносильны уравнения $15x=3$ и $5x=1$; $\frac{6x}{1+x^2}=\frac{7}{1+x^2}$ и $6x=7$.

Системы уравнений равносильны, если множества их решений совпадают.

Например, системы уравнений $\begin{cases} x+y=5, \\ x-y=1 \end{cases}$ и $\begin{cases} x^2-y^2=5, \\ x-y=1 \end{cases}$ равносильны, так как решением каждой из них является единственная пара чисел (3; 2).

Приведём примеры преобразований систем уравнений, приводящих к равносильным системам.

1) Одно из уравнений системы можно заменять равносильным ему уравнением.

Например, системы уравнений $\begin{cases} 2x-y=3, \\ 6x+4y=10 \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x-y=3, \\ 3x+2y=5 \end{cases}$ равносильны.

2) В одном из уравнений системы можно заменять одно неизвестное его значением или выражением через другие неизвестные, полученным из другого уравнения (это преобразование лежит в основе решения систем уравнений **способом подстановки**).

Например, системы уравнений $\begin{cases} y=2x-1, \\ x-y=3 \end{cases}$ и $\begin{cases} y=2x-1, \\ x-(2x-1)=3 \end{cases}$ равносильны.

3) Одно из уравнений системы можно заменять уравнением, являющимся суммой двух уравнений, каждое из которых получено умножением данных уравнений на числа, отличные от нуля (это преобразование лежит в основе решения систем уравнений **способом сложения**).

Например, равносильными являются системы уравнений:

$$\begin{cases} x-3y=5, \\ 2x+y=4 \;|\cdot 3, \end{cases} \quad \begin{array}{r} + \begin{cases} x-3y=5, \\ 6x+3y=12 \end{cases} \\ \hline 7x \quad =17 \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x-3y=5, \\ 7x=17. \end{cases}$$

Решая в 7—9 классах уравнения, вы делали проверку полученных корней, так как в ходе преобразований в ряде случаев появлялись **посторонние корни**. Это происходило, когда преобразование приводило к **уравнению-следствию**.

Приведём примеры преобразований, приводящих к уравнению-следствию.

1) Умножение обеих частей уравнения на выражение с неизвестным приводит к уравнению-следствию.

Например, умножая обе части уравнения $\frac{x^2-6}{x+2}=\frac{x}{x+2}$ (имеющего корень $x=3$) на двучлен $x+2$, получим уравнение-следствие $x^2-6=x$ (имеющего два корня $x_1=-2$ и $x_2=3$, один из которых — посторонний для исходного уравнения).

2) Возведение обеих частей уравнения в квадрат приводит к уравнению-следствию.

Например, возводя в квадрат обе части уравнения $\sqrt{5+4x}=-x$ (имеющего корень $x=-1$), получим уравнение-следствие $5+4x=x^2$ (имеющего корни $x_1=-1$ и $x_2=5$).

При некоторых преобразованиях можно получить уравнение, для которого исходное уравнение будет следствием полученного, т. е. может произойти **потеря корня** (или корней). Например, если обе части уравнения $x^2-1=x-1$, имеющего корни $x_1=0$ и $x_2=1$, разделить на $x-1$, то получится уравнение $x+1=1$, корнем которого является только $x=0$ (т. е. произойдёт потеря корня $x=1$).

Деление обеих частей уравнения на выражение с неизвестным может привести к потере корня.

3. Равносильные неравенства

При решении уравнений переход к уравнениям-следствиям оставляет возможность проверить найденные корни и выявить посторонние корни.

Решениями неравенств часто являются промежутки из бесконечного множества чисел, и осуществить проверку найденных решений бывает невозможно. Поэтому при решении неравенств выполняют такие преобразования, которые приводят только к равносильным неравенствам (неравенствам, имеющим одинаковые множества истинности).

Равносильными называют **неравенства**, имеющие одинаковые множества решений.

Напомним некоторые преобразования, которые приводят к равносильным неравенствам (они основаны на свойствах верных числовых неравенств — строгих и нестрогих).

1) Любое слагаемое можно переносить из одной части неравенства в другую, изменив его знак на противоположный.

Например, неравенство $3x+7<2-5x$ равносильно неравенству $3x+5x<2-7$.

2) Обе части неравенства можно умножать (или делить) на одно и то же положительное число или выражение, принимающее только положительные значения, сохраняя при этом знак неравенства.

Например, равносильными являются неравенства: $\frac{1}{3}x<4$ и $x<12$; $8x\geqslant 7$ и $\frac{8x}{x^2+5}\geqslant\frac{7}{x^2+5}$.

3) Обе части неравенства можно умножать (или делить) на одно и то же отрицательное число или выражение, принимающее только отрицательные значения, меняя при этом знак неравенства на противоположный.

Например, равносильными являются неравенства $-2x\geqslant 6$ и $x\leqslant -3$; $9x<2$ и $9x(-|x|-5)>2(-|x|-5)$.

Устные вопросы и задания

1. В каком случае предложение $q(x)$ является следствием предложения $p(x)$?
2. Привести пример предложения, являющегося следствием предложения «число x делится на 5».
3. Какие предложения $p(x)$ и $q(x)$ называют равносильными?
4. Привести пример предложения, равносильного предложению «$\sqrt{x^2}$ — неотрицательное число».
5. Какие уравнения называют равносильными?
6. Привести примеры преобразований уравнения, приводящих к равносильному уравнению.
7. Какие системы уравнений называют равносильными?
8. Привести примеры преобразований систем уравнений, приводящих к равносильной системе уравнений.
9. Как связаны множества корней уравнения и уравнения, являющегося следствием исходного?
10. Привести примеры преобразований уравнения, приводящих к уравнению-следствию, неравносильному исходному уравнению.
11. Привести пример преобразования уравнения, которое может привести к потере корней.
12. Какие неравенства называют равносильными?
13. Привести примеры преобразований неравенств, приводящих к равносильным неравенствам.

Вводные упражнения

1. Назвать множество истинности предложения:

   1) натуральное число x кратно 5 и меньше числа 30;
   2) $x^2-3x+2=0$; 3) $x^2>16$; 4) $|x|\leqslant 7$.

2. Найти $A \cup B$ и $A \cap B$, если:
1) $A = \{5; 7; 9\}$, $B = \{1; 5; 10\}$; 2) $A = \{1; 2\}$, $B = \{3; 4; 5\}$.
3. Найти объединение и пересечение отрезков:
1) $[-1; 1]$ и $[1; 2]$; 2) $[-3; 2]$ и $[-1; 1]$;
3) $[-5; 2]$ и $[-2; 6]$; 4) $[-4; 0]$ и $[1; 2]$.
4. Найти объединение и пересечение множеств корней уравнений $x^2 + 7x + 12 = 0$ и $x^2 - 2x - 3 = 0$.
5. Найти объединение и пересечение множеств решений неравенств:
1) $x > 5$ и $x \leqslant 6$; 2) $|x| \leqslant 25$ и $|x| < 3$.

Упражнения

397. Является ли второе предложение следствием первого:
1) углы A и B — смежные; сумма углов A и B равна $180°$;
2) сумма углов A и B равна $180°$; углы A и B — смежные;
3) сумма цифр числа x делится на 9; число x делится на 9;
4) число x делится на 9; сумма цифр числа x делится на 9?

398. Являются ли равносильными предложения:
1) число x оканчивается нулём; число x делится на 10;
2) сумма внутренних углов многоугольника x равна $180°$; многоугольник x — треугольник;
3) x — положительное число; x^2 — положительное число;
4) число x кратно числу 36; число x кратно числам 6 и 9?

399. Объяснить, почему равносильны уравнения:
1) $5x - 3 = 4 - 7x$ и $5x + 7x = 4 + 3$;
2) $\frac{2}{9}x + 1 = \frac{1}{3}$ и $2x + 9 = 3$;
3) $-42 + 6x = 24$ и $7 - x = -4$;
4) $0{,}02x - 5 = 0{,}3$ и $2x - 500 - 30 = 0$.

400. Объяснить, почему равносильны системы уравнений:
1) $\begin{cases} 2x - 9y = 1, \\ 3x + 9y = 5 \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x - 9y = 1, \\ 5x = 6; \end{cases}$
2) $\begin{cases} -4x + y = 7, \\ x = 2y - 1 \end{cases}$ и $\begin{cases} -4(2y - 1) + y = 7, \\ x = 2y - 1. \end{cases}$

401. Объяснить, почему равносильны неравенства:
1) $\frac{x}{3} - 2 > x - 5$ и $5 - 2 > x - \frac{x}{3}$; 2) $\frac{2}{5}x - 1 \leqslant 6$ и $2x - 35 \leqslant 0$;
3) $4 - 0{,}3x \geqslant 2$ и $3x \leqslant 20$; 4) $-18x + 11 < -7$ и $x - 1 > 0$.

402. Установить, является ли второе уравнение следствием первого; равносильны ли эти уравнения:
1) $2x - 3 = 0$ и $2x^2 - 3x = 0$; 2) $5x^2 - 2x + 1 = 0$ и $x^2 + 4 = 0$;
3) $\frac{14x - 15}{2x^2 + 1} = 8$ и $14x - 15 = 8(2x^2 + 1)$.

403. Доказать, что не являются равносильными уравнения:

1) $\frac{1}{x-8}+x^2=64+\frac{1}{x-8}$ и $x^2=64$;

2) $3x^2-9=0$ и $x+\sqrt{3}=0$;

3) $\sqrt{x+2}=x$ и $x+2=x^2$.

404. Решить уравнение, объясняя, к какому уравнению (равносильному или следствию) приводит каждое преобразование:

1) $55-(x+2)^3+(x-1)^3+9x^2=10$;

2) $\sqrt{7x-13}=1$;

3) $\frac{x^2-2x-8}{x-4}+\frac{x^2+x-12}{x-4}=13$;

4) $\sqrt{15+2x}=-x$.

405. Установить, при каком значении a равносильны уравнения:

1) $2x-a-7=0$ и $3x+2a=0$;

2) $x+3a+4=0$ и $a-5x+12=0$;

3) $ax-7x+4=0$ и $ax-3x-4=0$;

4) $4ax-x-3a-1=0$ и $2x-a=0$.

406. Установить, при каких значениях a и b равносильны системы уравнений:

1) $\begin{cases}(a-4)x+2y=4,\\ 6x+(b+3)y-3=0\end{cases}$ и $\begin{cases}8x+3y=1,\\ 5x-y+8=0;\end{cases}$

2) $\begin{cases}3x+(a-2)y=12,\\ (b+1)x+2y=6\end{cases}$ и $\begin{cases}7x+2y=10,\\ 9x+5y=8.\end{cases}$

Шаг вперёд

Новое равносильное преобразование

Со всеми преобразованиями, рассмотренными в этом параграфе, мы уже встречались. Пользовались ими при решении уравнений и неравенств, не называя их равносильными или приводящими к следствию. Наверное, существуют другие преобразования, о которых мы ещё не знаем?

В старших классах вы, конечно, узнаете и некоторые другие равносильные преобразования уравнений и неравенств. А сейчас я познакомлю вас с равносильным преобразованием неравенств определённого вида, которое поможет решать некоторые сложные неравенства:

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на множестве E, то неравенство

$$|f(x)|<|g(x)| \qquad (1)$$

равносильно каждому из неравенств на множестве E:

$$f^2(x)<g^2(x), \qquad (2)$$

$$(f(x)+g(x))(f(x)-g(x))<0. \qquad (3)$$

Думаю, что это преобразование легко обосновать с помощью свойства *о возведении в квадрат обеих частей неравенства с неотрицательными левой и правой частями*. Неравенство же (3) легко получается из неравенства (2) после перенесения $g^2(x)$ в левую часть и разложения $f^2(x)-g^2(x)$ на множители по формуле разности квадратов.

Ты абсолютно прав. Тебе и решать следующее неравенство: $|x^2-7x+6|>|x^2-x-2|$.

Так как данное неравенство имеет вид (1), то оно равносильно неравенству вида (3):

$$((x^2-7x+6)+(x^2-x-2))((x^2-7x+6)-(x^2-x-2))>0,$$

которое можно записать так: $(2x^2-8x+4)(-6x+8)>0$ или в виде $(x^2-4x+2)\left(x-\dfrac{4}{3}\right)<0$.

Квадратный трёхчлен x^2-4x+2 имеет корни $x_1=2-\sqrt{2}$ и $x_2=2+\sqrt{2}$, а $x-\dfrac{4}{3}=0$ при $x=\dfrac{4}{3}$. Применяя метод интервалов (см. рис.), находим решение последнего (а значит, и исходного) неравенства: $(-\infty;\ 2-\sqrt{2})\cup\left(\dfrac{4}{3};\ 2+\sqrt{2}\right)$.

Молодец. Попробуйте теперь решить и такие неравенства:

1) $|x^2-2x-3|\leqslant|x+1|$; 2) $\sqrt{x+18}<2-x$;

3) $\sqrt{1-x^2}+1<\sqrt{3-x^2}$; 4) $\sqrt{x^2-3x-4}<x-2$.

Но в трёх последних неравенствах отсутствуют знаки модулей. С помощью каких преобразований можно их решить?

Например, сравните с нулём левую и правую части второго неравенства $\sqrt{x+18}<2-x$. Выражение $\sqrt{x+18}$ имеет смысл при $x\geqslant-18$ и при этих значениях неизвестного $\sqrt{x+18}\geqslant0$ (по определению корня). По условию этот корень меньше, чем $2-x$, значит, $2-x>0$. Таким образом, при $-18\leqslant x<2$ имеет место неравенство с неотрицательными левой и правой частями. Обе его части можно возвести в квадрат и перейти к равносильному неравенству на множестве $[-18;\ 2)$.

Подскажу и о т в е т ы к заданным неравенствам: 1) $\{-1\}\cup[2;\ 4]$; 2) $[-18;\ -2)$; 3) $\left[-1;\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2};\ 1\right]$; 4) $[4;\ 8)$.

§ 29 Уравнение окружности

В этом и следующих параграфах речь пойдёт о предложениях с двумя переменными, заданными в виде уравнений, систем или совокупностей уравнений в виде неравенств или систем неравенств. В данном параграфе будет выведена формула, позволяющая находить расстояние между двумя точками координатной плоскости, если известны их координаты. С помощью этой формулы будет выведено уравнение окружности, описывающее множество точек плоскости, равноудалённых от одной точки (центра окружности).

Нужно вспомнить:

- построение точки с заданными координатами на координатной плоскости;
- теорему Пифагора;
- понятие модуля числа; тождество $\sqrt{a^2} = |a|$;
- нахождение расстояния между двумя точками на числовой прямой;
- определение окружности;
- построение перпендикуляра к прямой, проходящего через заданную точку.

1. Расстояние между двумя точками

Пусть на координатной плоскости заданы две точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ и $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$. Найдем расстояние между точками A и B (т. е. найдём длину отрезка AB).

Проведём через точки A и B прямые, перпендикулярные осям абсцисс и ординат. Точки пересечения этих прямых с осями обозначим $A_1(x_1; 0)$, $B_1(x_2; 0)$ и $A_2(0; y_1)$, $B_2(0; y_2)$ соответственно (рис. 62).

Точка C при данном расположении точек A и B — точка пересечения прямых AA_1 и BB_2.

Тогда $BC = B_1A_1 = |x_2 - x_1|$, а $AC = A_2B_2 = |y_2 - y_1|$. Применяя теорему Пифагора к прямоугольному треугольнику ABC, получим

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2, \quad (1)$$

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (1')$$

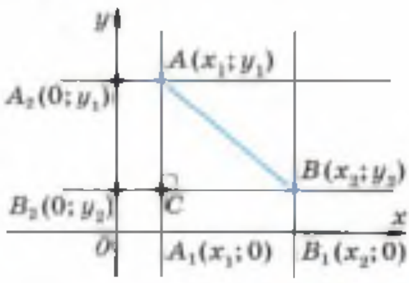


Рис. 62

Формула (1′) расстояния между двумя точками выведена из предположения, что $x_1 \neq x_2$ и $y_1 \neq y_2$. Однако она верна и в случае, когда справедливо хотя бы одно из равенств $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$. Например, если $x_1 = x_2$ и $y_1 \neq y_2$, то $AB = |y_2 - y_1|$. Этот же результат даёт и формула (1′):

$$AB = \sqrt{0^2 + (y_2 - y_1)^2} = |y_2 - y_1|.$$

Задача 1. Найти расстояние между точками $A(-2; 3)$ и $B(-5; -1)$.

▶ По условию $x_1 = -2$, $y_1 = 3$, $x_2 = -5$, $y_2 = -1$. Согласно формуле (1′) имеем

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-5 - (-2))^2 + (-1 - 3)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5.$$

Ответ. $AB = 5$. ◁

Задача 2. На оси ординат найти точку M, равноудалённую от точек $N(4; -3)$ и $K(-1; 0)$.

▶ Абсцисса точки M равна нулю. Обозначим её ординату через y_0. Зная, что расстояния от точки $M(0; y_0)$ до точек N и K равны, на основании формулы (1) запишем уравнение

$$(0 - 4)^2 + (y_0 + 3)^2 = (0 + 1)^2 + (y_0 - 0)^2,$$

$$16 + y_0^2 + 6y_0 + 9 = 1 + y_0^2,$$

$$6y_0 = -24, \quad y_0 = -4.$$

Ответ. $M(0; -4)$. ◁

2. Уравнение окружности

Уравнение фигуры на координатной плоскости — это уравнение с двумя переменными x и y. Говорят, что фигура Φ задана в прямоугольной системе координат данным уравнением, если фигуре Φ принадлежат те и только те точки плоскости, координаты которых удовлетворяют этому уравнению.

Иными словами, фигура Φ задана конкретным уравнением, когда выполняются два условия:

1) если точка $A(x; y)$ принадлежит фигуре Φ, то её координаты удовлетворяют данному уравнению;

2) если числа x и y удовлетворяют данному уравнению, то точка $A(x; y)$ принадлежит фигуре Φ.

Второе предложение можно выразить иначе: координаты любой точки $A(x; y)$, не принадлежащей фигуре Φ, не удовлетворяют данному уравнению.

Замечание. Сформулированные предложения 1 и 2 выражают необходимое и достаточное условия того, что некоторая фигура Φ задаётся определённым уравнением.

ТЕОРЕМА Уравнение

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2 \qquad (2)$$

является уравнением окружности с центром в точке $M\ (m; n)$ радиуса r.

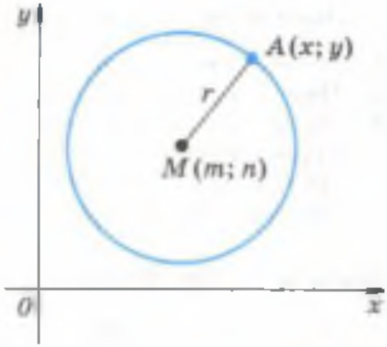


Рис. 63

● 1) Если точка $A\ (x; y)$ принадлежит рассматриваемой окружности (рис. 63), то расстояние от неё до центра окружности $M\ (m; n)$ равно r, т. е. $AM = r$. Согласно формуле (1) можно записать $(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$, что совпадает с уравнением (2).

2) Если координаты точки $A\ (x; y)$ удовлетворяют уравнению (2), то эта точка принадлежит окружности, так как расстояние от неё до центра окружности M равно r.

Заметим, что если точка $A\ (x; y)$ не принадлежит окружности, то $AM \neq r$ и её координаты не удовлетворяют уравнению (2).

Таким образом, уравнение (2) является уравнением окружности. ○

Если центром окружности является начало координат, то её уравнение имеет вид

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Задача 3. Записать уравнение окружности с центром в точке $M\ (-2; 5)$ радиуса $r = 3$.

▶ Абсцисса точки M равна $m = -2$, а её ордината $n = 5$. Применяя формулу (2), запишем уравнение окружности $(x - (-2))^2 + (y - 5)^2 = 3^2$.
Ответ. $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 9$. ◁

Задача 4. Записать уравнение окружности с центром в точке $M\ (6; 1)$, проходящей через точку $A\ (3; -4)$.

▶ По формуле (1) расстояния между двумя точками имеем $r^2 = AM^2 = (3 - 6)^2 + (-4 - 1)^2 = 9 + 25 = 34$. Согласно формуле (2) уравнение окружности имеет вид $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 34$.
Ответ. $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 34$. ◁

Задача 5. Определить вид фигуры, заданной уравнением

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 5 = 0.$$

▶ Преобразуем заданное уравнение к виду (2):
$(x^2 - 6x + 9) - 9 + (y^2 + 4y + 4) - 4 + 5 = 0$, откуда $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 8$.
Ответ. Окружность с центром в точке $M\ (3; -2)$ и радиусом $r = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. ◁

Устные вопросы и задания

1. Прочитать формулу расстояния между двумя точками.
2. Что называют уравнением фигуры на координатной плоскости?
3. Сформулировать все условия задания фигуры Φ конкретным уравнением.
4. Что такое уравнение окружности? Какой вид имеет уравнение окружности с центром в начале координат?

Вводные упражнения

1. На координатной плоскости отметить точки: $A(-5; 0)$; $B(0; -2)$; $C(-3; -2{,}5)$; $D(0{,}5; -4)$.
2. Найти расстояние между точками A и B, лежащими на прямой Ox, если:
   1) $A(0)$, $B(4)$; 2) $A(-8)$, $B(0)$; 3) $A(-2)$, $B(-5)$;
   4) $A(-3)$, $B(6)$; 5) $A(18)$, $B(1)$; 6) $A(12)$, $B(-7)$.
3. Найти гипотенузу прямоугольного треугольника, катеты которого:
   1) 4 см и 3 см; 2) 5 см и 12 см.
4. Вычислить: 1) $\sqrt{16\,900}$; 2) $\sqrt{0{,}04}$; 3) $\sqrt{1\frac{24}{25}}$; 4) $\sqrt{1{,}44}$.

Упражнения

407. Найти расстояние между точками A и B, если:
1) $A(0; -2)$, $B(4; 0)$; 2) $A(-4; 0)$, $B(0; 2)$;
3) $A(-1; -3)$, $B(1; 2)$; 4) $A(3; 1)$, $B(-2; -1)$;
5) $A(4; -5)$, $B(-3; 2)$; 6) $A(-3; 6)$, $B(3; -2)$.

408. Записать уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом r, если:
1) $r=6$; 2) $r=7$.

409. Выяснить, какие из точек $A(-3; 4)$, $B(5; -1)$, $C(-2; -3)$, $D(7; 6)$, $E(0; -5)$, $F(11; -2)$ принадлежат окружности, заданной уравнением:
1) $x^2+y^2=25$; 2) $(x-1)^2+(y+2)^2=100$.

410. Записать уравнение окружности с центром в точке M и радиусом r, если:
1) $M(0; -2)$, $r=3$; 2) $M(-3; 0)$, $r=2$;
3) $M(-1; 3)$, $r=1{,}5$; 4) $M(-2; 4)$, $r=0{,}5$;
5) $M(-2;-1)$, $r=1\frac{2}{3}$; 6) $M(-3;-2)$, $r=1\frac{3}{4}$.

411. На окружности, заданной уравнением $(x+4)^2+(y-5)^2=36$, найти точки:
1) с абсциссой, равной -4; 2) с ординатой, равной 5.

412. Даны точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$, и пусть $C(x; y)$ — середина отрезка AB. Доказать, что $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

413. Найти координаты точки C — середины отрезка AB, если:
1) $A(2; -5)$, $B(2; -3)$; 2) $A(0; 4)$, $B(-3; 1)$;
3) $A(2{,}5; 6)$, $B(-1{,}5; 5)$; 4) $A(-8{,}5; 2)$, $B(0{,}5; -7)$.

414. На оси ординат найти точку K, равноудалённую от точек M и N, если:
1) $M(2; 3)$, $N(-3; 1)$; 2) $M(1; -2)$, $N(3; 2)$.

415. На оси абсцисс найти точку P, равноудалённую от точек M и N, если:
1) $M(-4; -1)$, $N(-2; 3)$; 2) $M(2; -1)$, $N(-3; -5)$.

416. Записать уравнение окружности с центром в точке C, проходящую через точку D, если:
1) $C(-5; 2)$, $D(1; -1)$; 2) $C(2; -3)$, $D(-1; 1)$;
3) $C(3; 0)$, $D(-3; -3)$; 4) $C(-4; -4)$, $D(0; 2)$.

417. Записать уравнение окружности с диаметром AB, если:
1) $A(-4; 0)$, $B(2; -6)$; 2) $A(-6; 1)$, $B(0; 3)$.

418. Определить вид фигуры, заданной уравнением:
1) $x^2 + y^2 + 10x - 6y + 18 = 0$; 2) $x^2 + y^2 - 8x - 12y - 12 = 0$;
3) $x(x - 2) + y(y - 4) = 0$; 4) $x(x - 6) + y(y + 2) = 0$.

Разговор о важном

Профессор, можно ли считать, что уравнение $y = x^2$ или $y - x^2 = 0$ — это уравнение параболы и что оно задаёт квадратичную функцию?

Так как с помощью уравнения параболы $y = x^2$ устанавливается соответствие: каждому x единственное значение y, то можно говорить, что это уравнение задаёт функцию.

А как по графику того или иного уравнения узнать — является ли он графиком функции?

Особенностью графика любой функции $y = f(x)$ является то, что каждая прямая, проведённая параллельно оси Oy, пересекает график функции не более чем в одной точке. Об окружности такого не скажешь. Например, значению x_1 (см. рис.) соответствуют два значения y: y_1 и y_1'.

§ 30 Уравнение прямой

В этом параграфе будет строго доказано что графиком уравнения вида $ax+by=c$ с двумя неизвестными x и y является прямая линия. Будет введено понятие углового коэффициента прямой и показано, как с помощью этого понятия устанавливать взаимное расположение двух прямых.

Нужно вспомнить:

- построение графика линейной функции;
- понятия параллельности и перпендикулярности прямых;
- понятие серединного перпендикуляра к отрезку;
- нахождение значений выражений при заданных значениях входящих в него букв;
- формулы сокращённого умножения;
- выражение одного неизвестного через другое из линейного уравнения с двумя неизвестными;
- понятие тангенса острого угла в прямоугольном треугольнике;
- свойство равенства соответственных углов, образованных при пересечении параллельных прямых секущей.

1. Уравнение прямой

В 7 классе при решении систем линейных уравнений на основе наглядных представлений мы полагали, что графиком уравнения $ax+by=c$ (где x и y — неизвестные, a, b и c — заданные числа, причём a и b одновременно не равны нулю) является прямая. Однако строго этот факт не доказывался. Теперь у нас есть возможность доказать это утверждение.

ТЕОРЕМА Уравнение

$$ax+by=c, \tag{1}$$

где a, b и c — заданные числа, причём $a^2+b^2\neq 0$, является уравнением прямой.

Пусть m — произвольная прямая координатной плоскости. Отметим на плоскости точки $A_1(x_1; y_1)$ и $A_2(x_2; y_2)$ такие, что прямая m является серединным перпендикуляром к отрезку A_1A_2 (рис. 64).

1) Если точка $M(x; y)$ лежит на прямой m, то $A_1M=A_2M$ и $(A_1M)^2=$ $=(A_2M)^2$, а значит, координаты точки M удовлетворяют уравнению

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=(x-x_2)^2+(y-y_2)^2. \tag{2}$$

После возведения в квадрат выражений в скобках и приведения подобных членов уравнение (2) можно записать в виде

$$ax + by = c,$$

где $c = x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2$, $a = 2(x_1 - x_2)$, $b = 2(y_1 - y_2)$.

Итак, уравнение любой прямой можно записать в виде (1), где по крайней мере одно из чисел a, b не равно нулю.

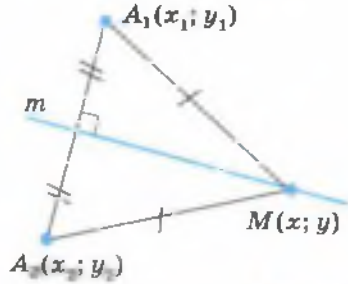


Рис. 64

2) Если координаты точки M удовлетворяют уравнению (2), а следовательно, и уравнению (1), то $A_1M = A_2M$. Это значит, что точка M лежит на серединном перпендикуляре к отрезку A_1A_2, т. е. лежит на прямой m. Таким образом, можно утверждать, что уравнение (1) является уравнением прямой. ○

Задача 1. Записать уравнение прямой, проходящей через точки $C(1; -2)$ и $D(-1; 1)$.

▶ Уравнение прямой CD запишем в виде $ax + by = c$. Подставляя координаты точек C и D в это уравнение, получаем $a \cdot 1 + b \cdot (-2) = c$, $a \cdot (-1) + b \cdot 1 = c$, откуда

$$\begin{cases} a - 2b = c, \\ -a + b = c. \end{cases}$$

Из этих уравнений (понимая, что c — некоторое число) выразим a и b через c, получим $a = -3c$, $b = -2c$. Подставив эти выражения вместо a и b в уравнение прямой, получим

$$-3cx - 2cy = c. \qquad (3)$$

Заметим, что $c \neq 0$, так как в противном случае (т. е. при $c = 0$) и $a = 0$, и $b = 0$, т. е. не будет выполнено условие теоремы $a^2 + b^2 \neq 0$. Поэтому, разделив обе части уравнения (3) на $c \neq 0$, получим искомое уравнение прямой $-3x - 2y = 1$. ◁

2. Угловой коэффициент прямой

Если в уравнении прямой $ax + by = c$ коэффициент $b \neq 0$, то уравнение можно записать в виде $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ или в виде

$$y = kx + l, \qquad (4)$$

где $k = -\frac{a}{b}$, $l = \frac{c}{b}$.

Возьмём на прямой (не совпадающей с осью ординат) две точки $A_1(x_1; y_1)$ и $A_2(x_2; y_2)$, такие, что $x_2 > x_1$. Координаты этих точек удовлетворяют уравнению (4), т. е. $y_1 = kx_1 + l$ и $y_2 = kx_2 + l$. Вычитая

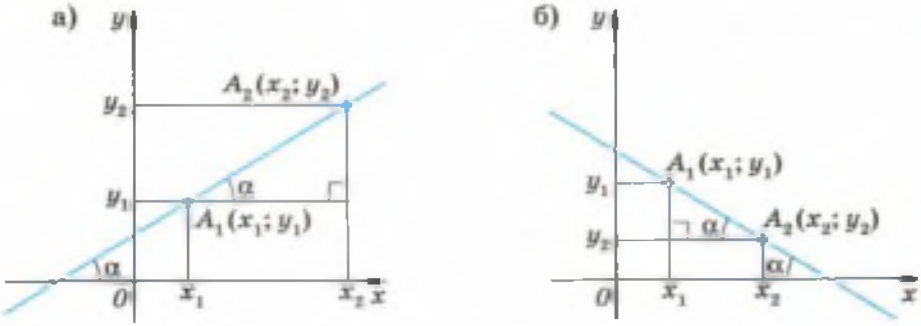


Рис. 65

почленно из второго равенства первое, получим $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$, откуда $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Если $y_2 = y_1$, то прямая параллельна оси абсцисс или совпадает с ней и $k = 0$. Если $y_2 > y_1$ (рис. 65, *а*), то $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \operatorname{tg}\alpha > 0$. Если $y_2 < y_1$ (рис. 65, *б*), то $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-(y_1 - y_2)}{x_2 - x_1} = -\operatorname{tg}\alpha < 0$.

Очевидно, что от угла между прямой и осью абсцисс зависит значение коэффициента k, называемого **угловым коэффициентом** прямой, уравнение которой записано в виде (4).

Пусть даны уравнения двух прямых $y = k_1x + l_1$, $y = k_2x + l_2$. Несложно убедиться в том, что: 1) при $k_1 = k_2$ и $l_1 = l_2$ прямые совпадают; 2) при $k_1 \neq k_2$ прямые пересекаются (имеют одну общую точку); 3) при $k_1 = k_2$ и $l_1 \neq l_2$ прямые параллельны (не имеют общих точек).

Задача 2. Установить взаимное расположение прямых $x + 3y = 2$ и $2x - y = -3$.

▶ Первое из данных уравнений запишем в виде $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$, второе — в виде $y = 2x + 3$. Угловые коэффициенты первой и второй прямых соответственно равны $k_1 = -\frac{1}{3}$ и $k_2 = 2$. Так как $k_1 \neq k_2$, то прямые пересекаются.

Ответ. Прямые пересекаются. ◁

Устные вопросы и задания

1. Какой вид имеет уравнение прямой?
2. Что такое угловой коэффициент прямой?
3. С помощью понятия углового коэффициента прямой сформули-

рова́ть условия: 1) параллельности двух прямых; 2) совпадения двух прямых; 3) пересечения двух прямых.

4. Каким образом знак углового коэффициента прямой связан с её расположением относительно оси абсцисс на координатной плоскости?

Вводные упражнения

1. Построить график функции: 1) $y=-2x+5$; 2) $y=\frac{1}{2}x-3$.
2. Построить серединный перпендикуляр к отрезку AB, если: 1) $A(4;0)$, $B(-2;0)$; 2) $A(-3;1)$, $B(4;3)$.
3. Установить, принадлежит ли точка A графику уравнения $6x-5y=2$, если:

   1) $A\left(-\frac{1}{2};-1\right)$; 2) $A\left(\frac{1}{3};1\right)$.

Упражнения

419. Записать уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку M, если:
1) $M(2;3)$; 2) $M(4;2)$; 3) $M(-6;1)$; 4) $M(2;-5)$.

420. Записать уравнение прямой, проходящей через точки A и B, если:
1) $A(0;2)$, $B(1;-1)$; 2) $A(2;0)$, $B(-1;-1)$;
3) $A(-5;6)$, $B(4;-5)$; 4) $A(8;1)$, $B(-2;-7)$.

421. Записать уравнения прямых, параллельных осям координат и проходящих через точку:
1) $M(-5;6)$; 2) $N(4;-7)$.

422. Найти угловой коэффициент k прямой, заданной уравнением:
1) $7x-y=3$; 2) $4x-y=5$; 3) $3x+2y=1$; 4) $5x+2y=2$.

423. (Устно.) Установить взаимное расположение прямых, заданных уравнениями:
1) $y=3x-7$ и $y=7x-3$; 2) $y=5x+4$ и $y=2x-6$;
3) $y=-2x+3$ и $y=-2x+5$; 4) $y=-x+6$ и $y=6-x$;
5) $y=-5x+1$ и $y=1-5x$; 6) $y=6x-1$ и $y=6x+3$.

424. Установить взаимное расположение прямых, заданных уравнениями:
1) $4x-3y=2$ и $8x-6y=5$; 2) $3x-2y=7$ и $6x-4y=9$;
3) $-2x+5y=10$ и $3x-4y=8$; 4) $-4x+3y=6$ и $5x-6y=12$;
5) $6x-4y=10$ и $3x-2y=5$; 6) $3x-2y=-7$ и $-6x+4y=14$.

425. Найти координаты точки пересечения прямых, заданных уравнениями:
1) $2x+y=1$, $x+2y=8$; 2) $x-2y=8$, $2x+3y=9$.

426. Известны координаты вершин треугольника: $A\,(2;\,5)$, $B\,(3;\,-1)$, $C\,(-2;\,1)$. Написать уравнение прямой, содержащей медиану треугольника ABC, проходящей через вершину: 1) A; 2) B; 3) C.

427. Известны координаты вершин треугольника: $A\,(6;\,0)$, $B\,(0;\,-4)$, $C\,(-4;\,4)$. Написать уравнения прямых, содержащих средние линии треугольника.

428. Найти координаты точек пересечения с осями координат прямой, заданной уравнением:
1) $2x-3y=5$; 2) $3x+4y=2$.

429. Найти коэффициенты a и b в уравнении прямой $ax+by=3$, если известно, что она проходит через точки:
1) $A\,(0;\,-1)$, $B\,(2;\,3)$; 2) $A\,(-4;\,2)$, $B\,(3;\,0)$.

430. Даны координаты вершин трапеции: $A\,(0;\,2)$, $B\,(4;\,0)$, $C\,(0;\,-4)$, $D\,(-2;\,0)$. Записать:
1) уравнения прямых, содержащих диагонали трапеции;
2) уравнение прямой, содержащей среднюю линию трапеции.

Шаг вперёд

Условие перпендикулярности двух прямых

Профессор, я понял, что с помощью угловых коэффициентов можно устанавливать взаимное расположение прямых на плоскости. Нет ли удобного способа нахождения угла между двумя прямыми?

С помощью формул тригонометрии (с которыми вы познакомитесь в 10 классе) можно вывести формулу величины угла между прямыми, а также можно доказать следующую теорему (которую мы примем без доказательства).

ТЕОРЕМА Для того чтобы прямые $y=k_1x+l_1$ и $y=k_2x+l_2$ были взаимно перпендикулярными, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $k_1\cdot k_2=-1$.

Замечу, что в курсе геометрии взаимную перпендикулярность прямых можно легко обосновать с помощью скалярного произведения векторов.

Давайте проверим, например, будут ли перпендикулярными прямые $2x-3y=7$ и $3x+2y=4$.

Сперва представим уравнения в виде $y=kx+l$, чтобы легче было выявить угловые коэффициенты k_1 и k_2. Первое уравнение запишем в виде

$$y=\frac{2}{3}x-\frac{7}{3}\ \left(\text{т. е. } k_1=\frac{2}{3}\right),$$

а второе уравнение — в виде

$$y = -\frac{3}{2}x + 2\left(\text{т. е. } k_2 = -\frac{3}{2}\right).$$

Прямые перпендикулярны, так как $k_1 \cdot k_2 = -1$.

Решим ещё задачу: «Записать уравнение прямой, проходящей через точку (–1; 2), перпендикулярно прямой $y = 3x + 4$».

▶ Пусть k_1 — угловой коэффициент искомой прямой. Угловой коэффициент заданной прямой $k_2 = 3$. Из формулы $k_1 \cdot k_2 = -1$ находим $k_1 = -\frac{1}{k_2} = -\frac{1}{3}$. Уравнение искомой прямой запишем в виде $y = -\frac{1}{3}x + l$. Так как эта прямая проходит через точку (–1; 2), то $2 = -\frac{1}{3} \cdot (-1) + l$, откуда $l = \frac{5}{3}$.

Ответ. $y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$. ◁

Теперь самостоятельно запишите уравнение прямой, проходящей через точку (5; –2), перпендикулярно прямой $y = -6x + 13$.

§ 31 Множества точек на координатной плоскости

В предыдущих параграфах рассматривались уравнения двух фигур: окружности и прямой. Приведём ещё несколько примеров уравнений фигур, знакомых из курса алгебры:

$$y = x^2,\ y = x^3,\ y = \sqrt{x},\ y = \frac{1}{x}.$$

Фигуру на плоскости можно также задавать системой или совокупностью уравнений (неравенств) с двумя неизвестными. Например, точку $O\,(0;\,0)$ координатной плоскости можно рассматривать как пересечение фигур, заданных уравнениями $x - y = 0$ и $x + y = 0$, т. е. системой уравнений

$$\begin{cases} x - y = 0, \\ x + y = 0. \end{cases}$$

В этом параграфе будут рассмотрены фигуры, задаваемые с помощью уравнений и неравенств, систем и совокупностей уравнений и неравенств. Множества истинности предложений с двумя переменными будут иллюстрироваться множествами точек на координатной плоскости.

Нужно вспомнить:

- уравнения прямой и окружности;
- построение графика уравнения прямой;
- построение на координатной плоскости окружности по её уравнению;
- понятия системы и совокупности предложений с переменными;
- графики функций: $y=x^2$, $y=x^3$, $y=\sqrt{x}$, $y=\frac{k}{x}$, $y=|x|$.

1. Фигура, заданная уравнением или системой уравнений с двумя неизвестными

Задача 1. Определить фигуру, заданную уравнением

$$(y-1)^2+(x+3y)^2=0. \qquad (1)$$

▶ Имеем $(y-1)^2 \geqslant 0$ и $(x+3y)^2 \geqslant 0$, а сумма двух неотрицательных чисел равна нулю тогда и только тогда, когда каждое из этих чисел равно нулю. Таким образом, фигура, заданная уравнением (1), может быть задана и системой уравнений

$$\begin{cases} y-1=0, \\ x+3y=0. \end{cases} \qquad (2)$$

Системе (2), а значит, и уравнению (1) удовлетворяет единственная пара чисел $x=-3$, $y=1$, определяющая точку $(-3; 1)$ на координатной плоскости.

Ответ. Точка с координатами $x=-3$, $y=1$. ◁

Изображение на координатной плоскости всех точек фигуры, заданной с помощью уравнений, в ряде случаев помогает найти решения этих уравнений (систем; совокупностей уравнений) или по крайней мере сделать предположение о количестве их решений.

Задача 2. Определить фигуру, заданную системой уравнений

$$\begin{cases} y=-x+1, \\ (x+2)^2+y^2=9. \end{cases} \qquad (3)$$

▶ Фигуры, заданные уравнениями системы (прямая и окружность), изображены на рисунке 66. Они пересекаются в точках A и B. Подстановкой в систему (3) значений $x=-2$ и $y=3$ можно убедиться в том, что точка A имеет координаты $(-2; 3)$. Аналогично убеждаемся в том, что точка B имеет координаты $(1; 0)$.

Ответ. Фигура состоит из двух точек $A(-2; 3)$ и $B(1; 0)$. ◁

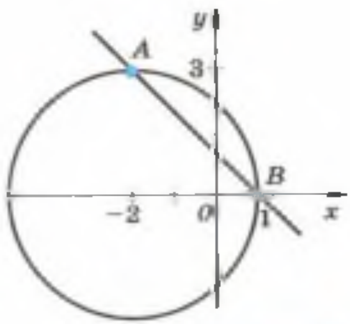


Рис. 66

Задача 3. На координатной плоскости изобразить фигуру Φ, заданную уравнением $x^2 - y^2 = 0$.

▶ Запишем данное уравнение в виде

$$(x - y)(x + y) = 0. \qquad (4)$$

Фигура, заданная уравнением (4), определяется совокупностью уравнений $x - y = 0$ и $x + y = 0$. На рисунке 67 изображена искомая фигура Φ.

Ответ. Φ состоит из двух прямых $y = x$ и $y = -x$. ◁

Рис. 67

2. Фигура, заданная неравенством или системой неравенств с двумя неизвестными

Говорят, что **фигура Φ задана в прямоугольной системе координат данным неравенством**, если фигуре Φ принадлежат те и только те точки плоскости, координаты которых удовлетворяют этому неравенству.

Например, неравенством $x \geqslant 1$ задаётся правая полуплоскость, ограниченная прямой $x = 1$ (рис. 68, *а*); неравенством $x^2 + y^2 \leqslant 4$ задан круг с центром в точке $O\,(0;\ 0)$ и радиусом 2 (рис. 68, *б*); неравенством $x^2 + y^2 > 4$ задана часть плоскости, являющаяся дополнением круга с центром в начале координат и радиусом 2 до всей координатной плоскости (рис. 68, *в*).

Если фигура задана уравнением $F\,(x;\ y) = 0$ и является линией, разбивающей плоскость на две части, то в одной из частей будет выполняться неравенство $F\,(x;\ y) > 0$, а в другой — неравенство $F\,(x;\ y) < 0$. Чтобы определить, какое из этих двух неравенств выполняется в конкретной части плоскости, нужно взять произвольную точку в этой части плоскости с координатами $(x_0;\ y_0)$ и выяснить знак $F\,(x_0;\ y_0)$.

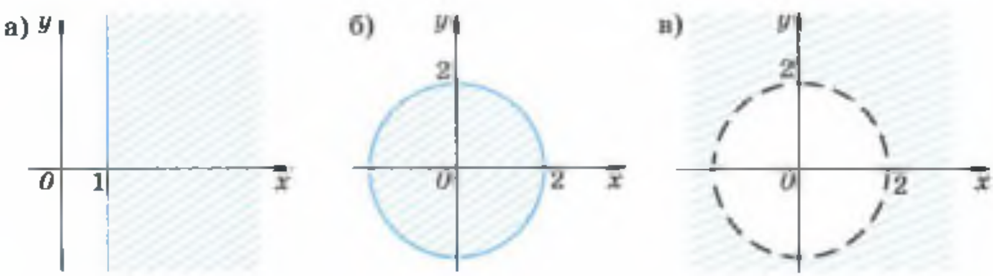


Рис. 68

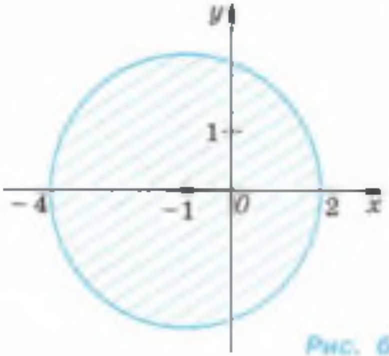


Рис. 69

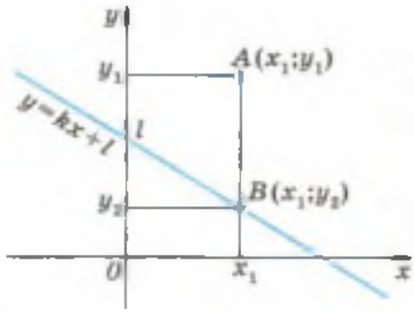


Рис. 70

Например, для окружности, заданной уравнением $(x+1)^2+y^2=9$, выясним знак $F(x;y)=(x+1)^2+y^2-9$. Для точки $O(0;0)$, принадлежащей (по отношению к окружности) внутренней части плоскости, имеем $F(0;0)=(0+1)^2+0^2-9=-8<0$. Значит, неравенству $(x+1)^2+y^2-9<0$ (следовательно, и неравенству $(x+1)^2+y^2<9$) удовлетворяют точки круга (без границы) с центром в точке $(-1;0)$ радиуса 3 (рис. 69).

Прямая $y=kx+l$ также разбивает плоскость на две части — полуплоскости. Ту из них, которая содержит, например, точку $(0;l+1)$, назовём **верхней**. Возьмём в верхней полуплоскости произвольную точку $A(x_1;y_1)$ и через эту точку проведём прямую, перпендикулярную оси абсцисс (рис. 70) и пересекающую прямую $y=kx+l$ в точке $B(x_1;y_2)$. Координаты точки B удовлетворяют уравнению этой прямой. Так как $y_1>y_2$ (см. рис. 70), то для любой точки A верхней полуплоскости выполняется неравенство $y>kx+l$, а для любой точки $(x;y)$, лежащей ниже прямой $y=kx+l$, — неравенство $y<kx+l$.

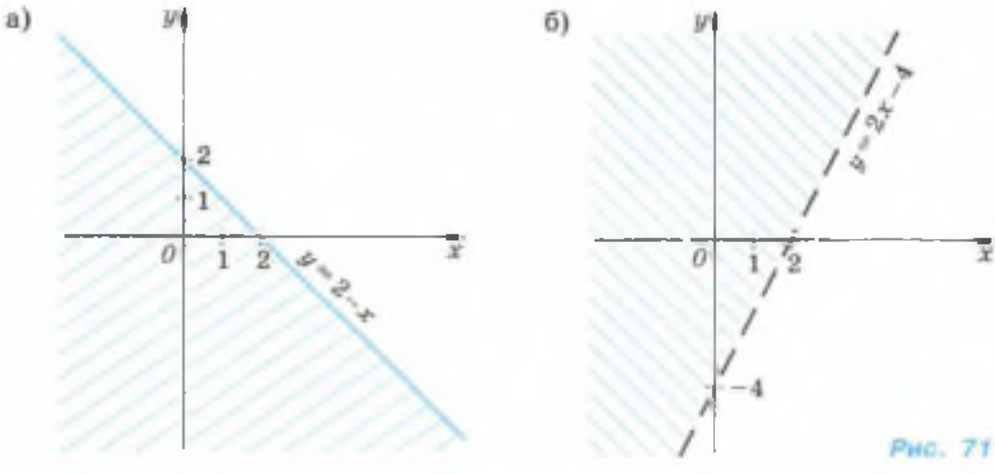


Рис. 71

Задача 4. Изобразить множество точек плоскости, удовлетворяющих неравенству:

1) $y \leqslant 2 - x$; 2) $y > 2x - 4$.

▶ 1) Неравенству $y \leqslant 2 - x$ удовлетворяют координаты всех точек полуплоскости, лежащих ниже прямой $y = 2 - x$ (на рисунке 71, *а* эта полуплоскость отмечена штриховкой), и точек самой этой прямой.

2) Неравенству $y > 2x - 4$ удовлетворяют координаты точек полуплоскости, лежащих выше прямой $y = 2x - 4$ (эта полуплоскость отмечена штриховкой на рисунке 71, *б*; сама прямая в это множество не входит.)

Ответ. 1) Рис. 71, *а*; 2) рис. 71, *б*. ◁

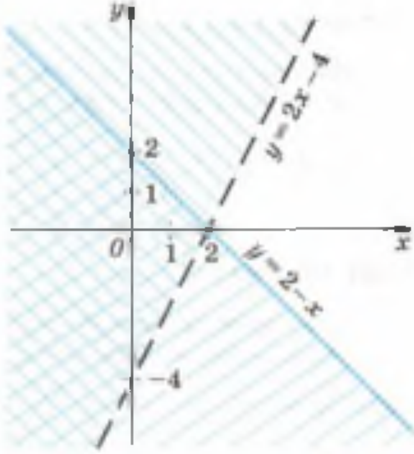


Рис. 72

Задача 5. На координатной плоскости изобразить множество точек, удовлетворяющих системе неравенств $\begin{cases} x + y \leqslant 2, \\ 2x - y < 4. \end{cases}$

▶ Преобразуем данную систему к виду

$$\begin{cases} y \leqslant 2 - x, \\ y > 2x - 4. \end{cases}$$

На координатной плоскости (рис. 72) отметим штриховкой множества точек плоскости, удовлетворяющих каждому из неравенств системы (см. решение задачи 4). Точки координатной плоскости, удовлетворяющие как первому, так и второму неравенствам системы (точки той части плоскости, где штриховки пересекаются, и точки прямой $y = 2 - x$), удовлетворяют заданной системе.

Ответ. Рисунок 72. ◁

Устные вопросы и задания

1. Сколько общих точек могут иметь окружность и прямая, построенные в одной системе координат?
2. Как выглядит фигура, заданная системой (совокупностью) двух линейных уравнений с двумя неизвестными, если угловые коэффициенты этих прямых различны?
3. Какая фигура задаётся неравенством: $x \geqslant 1$; $x^2 + y^2 \leqslant 4$; $x^2 + y^2 > 4$?
4. Какие точки координатной плоскости удовлетворяют неравенству $y \leqslant 2 - x$; $y > 2x - 4$?

Вводные упражнения

Изобразить на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих уравнению:

1) $x=3$; 2) $y=-4$; 3) $x+2y=6$;
4) $2x-y=5$; 5) $x^2+y^2=4$; 6) $(x-2)^2+(y+3)^2=9$;
7) $y=|x|$; 8) $y=|x|-2{,}5$; 9) $y=|x+1|-3$.

Упражнения

На координатной плоскости изобразить фигуру, заданную уравнением (431—432).

431. 1) $y=x^2$; 2) $y=\sqrt{x}$; 3) $y=\frac{1}{x}$; 4) $y=x^3$; 5) $y=x^2-0{,}5$;

6) $y=(x+4)^2-1$; 7) $y=\sqrt{x}+3$; 8) $y=\sqrt{x-2}$;

9) $y=\frac{1}{x+1}$; 10) $y=-\frac{1}{x}+3$; 11) $y=(x-2)^3$; 12) $y=x^3+2$.

432. 1) $(y+2)^2+(x-y)^2=0$; 2) $(x+y)^2+(x-3)^2=0$.

С помощью графической иллюстрации определить фигуру, заданную системой уравнений (433—434).

433. 1) $\begin{cases} x^2+y^2=36, \\ x-y=3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+y^2=16, \\ x+y=2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y=|x|, \\ (x-1)^2+y^2=9; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2+(y-2)^2=4, \\ y=|x|. \end{cases}$

434. 1) $\begin{cases} y=\sqrt{x}, \\ y=x^2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y=x^3, \\ y=\sqrt{x}. \end{cases}$

435. На координатной плоскости изобразить фигуру, заданную уравнением:
1) $4x^2-y^2=0$; 2) $x^2-9y^2=0$;
3) $25x^2-4y^2=0$; 4) $16x^2-36y^2=0$.

На координатной плоскости штриховкой показать множество точек, удовлетворяющих данному неравенству (436—438).

436. 1) $y\geqslant 0$; 2) $y\leqslant 0$; 3) $y<-1$; 4) $y>-2$;
5) $x\leqslant 0$; 6) $x\geqslant 0$; 7) $x>-2$; 8) $x<1$.

437. 1) $y>x+1$; 2) $y<x-2$;
3) $2x-y\geqslant 1$; 4) $2x+y\geqslant 1$.

438. 1) $x^2+y^2\leqslant 9$; 2) $x^2+y^2<16$;
3) $x^2+y^2>25$; 4) $x^2+y^2\geqslant 36$;

5) $(x+3)^2+(y-3)^2<36$; 6) $(x-2)^2+(y+4)^2\geqslant 25$;

7) $(x-1)^2+(y+2)^2\geqslant 2\frac{1}{4}$; 8) $(x+1)^2+(y-3)^2<1\frac{7}{9}$.

На координатной плоскости изобразить множество точек, удовлетворяющих данной системе неравенств (439—440).

439. 1) $\begin{cases}3x-y\geqslant 1,\\2x+y\geqslant 3;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}3x+y\leqslant 2,\\4x-y\leqslant 3;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}-x+2y>4,\\3x+y<1;\end{cases}$

4) $\begin{cases}4x+y>5,\\-3x+2y<4;\end{cases}$ 5) $\begin{cases}x-\dfrac{y}{2}\geqslant -1,\\2x+y>2;\end{cases}$ 6) $\begin{cases}2x-y<-1,\\x+\dfrac{y}{2}\geqslant 1.\end{cases}$

440. 1) $\begin{cases}x^2+y^2<9,\\2x-y\leqslant 1;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x^2+y^2\leqslant 16,\\3x-y>2;\end{cases}$

3) $\begin{cases}(x-1)^2+(y+2)^2\geqslant 25,\\3x+y<2;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}(x+2)^2+(y-1)^2>36,\\2x+y\leqslant 4.\end{cases}$

Шаг вперёд

Задачи линейного программирования

Профессор, имеет ли какое-нибудь практическое применение умение находить множества точек на плоскости, удовлетворяющих различным уравнениям и неравенствам?

Это умение применяется при решении многих прикладных задач, в частности при решении задач *линейного программирования*. Они решаются чаще всего в экономике: при установлении оптимальных способов перевозок, при распределении ресурсов, при планировании подготовки кадров и т. п. В этих задачах условия (ограничения) имеют вид линейных уравнений и неравенств с несколькими неизвестными, а *целевая функция* тоже является линейной.

Приведите, пожалуйста, пример задачи линейного программирования, чтобы мы поняли, что такое целевая функция и как наши умения могут пригодиться при решении таких задач.

Допустим, мастерская специализируется на производстве стульев и кресел. Каждый стул приносит прибыль в размере 2 тыс. р., а каждое кресло — 4 тыс. р. На изготовление одного стула требуется 4 ч работы на участке A и 2 ч работы на участке B. Кресло изготавливается с затратами 6 ч на участке A, 6 ч — на участке B и 1 ч — на участке C. Доступная производительная мощность участка A составляет 120 ч в день, участка B — 72 ч в день, участка C — 10 ч в день. Сколько стульев и кресел должна выпускать мастерская ежедневно, чтобы получать максимальную прибыль? Какова эта прибыль?

Для наглядности условие задачи представим в виде таблицы:

Производственные участки	Затраты времени на единицу продукции, ч		Доступный фонд времени, ч
	стулья	кресла	
A	4	6	120
B	2	6	72
C	—	1	10
Прибыль на единицу продукции, тыс. р.	2	4	

Пусть x — число выпускаемых ежедневно стульев, y — число выпускаемых ежедневно кресел. По условию задачи составим систему неравенств:

$$\begin{cases} 4x + 6y \leqslant 120, \\ 2x + 6y \leqslant 72, \\ y \leqslant 10, \\ y \geqslant 0, \\ x \geqslant 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Позже, при исследовании решений системы, будем учитывать, что $x \in N$ и $y \in N$.

Ежедневная прибыль мастерской $S = 2x + 4y$ (тыс. р.). Число S и является *целевой функцией* производства. Задача сводится к нахождению наибольшего значения S на множестве, определённом системой неравенств (1).

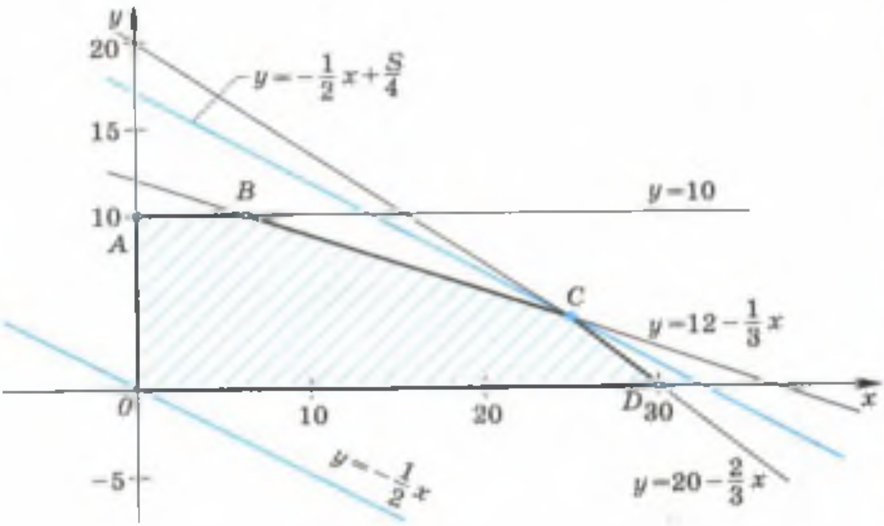
Из первого и второго неравенств системы выразим y и перепишем систему в виде

$$\begin{cases} y \leqslant 20 - \dfrac{2}{3}x, \\ y \leqslant 12 - \dfrac{1}{3}x, \\ y \leqslant 10, \\ y \geqslant 0, \\ x \geqslant 0. \end{cases}$$

Множество решений полученной системы изображено в виде заштрихованного многоугольника $OABCD$ (см. рис. на с. 255).

Выразим y из равенства $S = 2x + 4y$, задающего целевую функцию: $y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{S}{4}$.

При разных значениях S функции $y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{S}{4}$ изображаются прямыми, параллельными прямой $y = -\dfrac{1}{2}x$. *Наибольшее значе-*



ние S принимает в вершине заштрихованного многоугольника C, координаты которой (24; 4) совпадают с решением системы

$$\begin{cases} y = 20 - \dfrac{2}{3}x, \\ y = 12 - \dfrac{1}{3}x. \end{cases}$$

Подставляя значения $x = 24$ и $y = 4$ в $S = 2x + 4y$, находим искомое значение целевой функции: $S = 2 \cdot 24 + 4 \cdot 4 = 64$.

Ответ. Чтобы получать максимальную прибыль, равную 64 тыс. р., мастерская должна ежедневно выпускать 24 стула и 4 кресла.

Попробуйте самостоятельно решить следующую задачу о пищевом рационе коров. Для кормления коров на ферме используются силос и концентраты. Содержание кормовых единиц, белка и кальция в 1 кг каждого вида корма, а также себестоимость 1 кг корма определяются таблицей:

Вид корма	Содержание в 1 кг			Себестоимость 1 кг корма, р.
	кормовых единиц	белка, г	кальция, г	
Силос	0,2	10	4	0,2
Концентраты	1,0	200	3	0,8

При составлении дневного рациона нужно выполнить следующие условия:

1) в день можно расходовать не более 25 кг силоса и не более 10 кг концентратов;

2) кормовых единиц должно быть не менее 20;

3) белка должно быть не менее 2000 г;

4) кальция должно быть не менее 100 г.

Требуется составить дневной рацион так, чтобы его себестоимость была наименьшей.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ VI

441. Записать все подмножества множества:

1) $A=\{8; 9\}$; 2) $B=\{1; 2\}$;
3) $C=\{a; d; c\}$; 4) $D=\{m; n; p\}$.

442. Найти дополнение множества M до множества N, если:

1) $M=\{1; 2; 3; 4\}$, $N=\{2; 3\}$;
2) $M=\{-3; -1; 1; 3\}$, $N=\{-1; 3\}$;
3) $M=\{a; b; c; d; e\}$, $N=\{a; d; e\}$;
4) $M=\{k; l; m; n; p\}$, $N=\{n\}$.

443. Найти $A\setminus B$ и $B\setminus A$, если:

1) $A=\{a; b; c; d\}$, $B=\{c; d; e\}$;
2) $A=\{b; c; f\}$, $B=\{a; b; c; d\}$;
3) $A=\{3; 4; 5; 6; 7\}$, $B=\{3; 5; 7; 9\}$;
4) $A=\{1; 3; 5; 7\}$, $B=\{1; 2; 4; 5\}$.

444. Найти $M\cup K$ и $M\cap K$, если:

1) $M=\{a; b; c; d\}$, $K=\{b; c; d; e\}$;
2) $M=\{a; b; c; d; e\}$, $K=\{a; c; e; k\}$;
3) $M=\{-1; 0\}$, $K=\{-3; -2; -1; 0; 1\}$;
4) $M=\{-5; -3; -1\}$, $K=\{1; 2; 3\}$.

445. Найти объединение и пересечение отрезков:

1) $[-1; 3]$ и $[0; 4]$; 2) $[-6; -2]$ и $[-4; 2]$;
3) $[-6; -3]$ и $[-3; 0]$; 4) $[-5; -2]$ и $[-2; 2]$.

446. Сформулировать высказывание $\bar{v}$, если известно высказывание v:

1) $5\neq5$; 2) $17=17$; 3) $23\geqslant10$; 4) $15<7$.

Найти множество истинности предложения **(447—448)**.

447. 1) n — натуральное число, кратное 3, но меньшее, чем 20;
2) n — натуральный делитель числа 45;
3) $-2\leqslant y<1$, $y\in Z$;
4) $-4<z\leqslant2$, $z\in Z$.

448. 1) $\begin{cases} x^2+6x+9=0, \\ x^2+x-6=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2-5x+4=0, \\ x^2-8x+16=0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2-4x+4\leqslant 0, \\ x\geqslant 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2-2x+1\geqslant 0, \\ (x+3)^2=0. \end{cases}$

449. Для каждого из предложений $p(x)$:
1) $x^2=10$; 2) $x^2+2=0$; 3) $x^2-8=0$; 4) $|x|=3$.
определить, истинным или ложным является высказывание $(\forall x)\, p(x)$; $(\exists x)\, p(x)$.

450. Привести контрпример, опровергающий утверждение:
1) любое чётное число делится на 4;
2) любое нечётное число делится на 3;
3) около любого четырёхугольника можно описать окружность;
4) сумма внутренних углов любого многоугольника равна 360°.

451. Найти расстояние между точками M и N, если:
1) $M(-2; 3)$, $N(3; -2)$; 2) $M(-5; 1)$, $N(1; -5)$;
3) $M(-5; -4)$, $N(0; 2)$; 4) $M(3; 0)$, $N(-6; -3)$.

452. Записать уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом r, если:
1) $r=2{,}5$; 2) $r=1{,}5$.

453. Записать уравнение окружности с центром в точке C и радиусом r, если:
1) $C(-4; 5)$, $r=3$; 2) $C(2; -6)$, $r=4$;
3) $C(0{,}5; -1)$, $r=6$; 4) $C(-1{,}5; -3)$, $r=5$.

454. Выяснить, какие из точек $A(1; 3)$, $B(1; 2)$, $C(0; 1)$, $D(-1; 1)$ принадлежат окружности, заданной уравнением:
1) $x^2+(y-2)^2=2$; 2) $(x+1)^2+(y-3)^2=5$.

455. Записать уравнение прямой, проходящей через точки M и N, если:
1) $M(7; 0)$, $N(0; -6)$; 2) $M(0; -4)$, $N(5; 0)$;
3) $M(-8; 10)$, $N(7; -2)$; 4) $M(6; -9)$, $N(-7; 5)$.

456. Найти угловой коэффициент прямой, заданной уравнением:
1) $3x-2y=5$; 2) $-4x+3y=1$;
3) $\frac{2}{3}x-\frac{y}{2}=-1$; 4) $\frac{x}{2}+\frac{3}{4}y=1$.

457. Среди прямых, заданных уравнениями
$x+y=1$, $2x-4y=3$, $2x+2y=5$, $-x+2y=4$,
указать пары параллельных прямых.

458. Среди прямых, заданных уравнениями

$3x + y = 2, \quad -2x + y = 3, \quad \frac{x}{2} + y = 2, \quad 4x - 2y = 1,$

указать те, которые пересекают прямую $2x - y = 1$.

459. На координатной плоскости изобразить фигуру, заданную уравнением:

1) $-3x + y = 2$;
2) $4x - y = 1$;
3) $5x - 2y = 4$;
4) $3x + 2y = 6$;
5) $x^2 + y^2 = 2{,}25$;
6) $x^2 + y^2 = 6{,}25$;
7) $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 36$;
8) $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 25$.

460. На координатной плоскости штриховкой показать множество точек, удовлетворяющих неравенству:

1) $x \geqslant -3$;
2) $x \leqslant -2$;
3) $y < 2$;
4) $y > 4$;
5) $y < -2x + 3$;
6) $y > -3x - 1$;
7) $y \geqslant \frac{x}{2} - 2$;
8) $y \leqslant \frac{x}{3} + 2$;
9) $x^2 + y^2 < 9$;
10) $x^2 + y^2 \geqslant 16$;
11) $(x + 0{,}5)^2 + (y - 3)^2 \geqslant 25$;
12) $(x - 4)^2 + (y + 1{,}5)^2 < 4$.

461. Найти объединение и пересечение множеств A и B, если:

1) $A = \{x\colon |x| \leqslant 2,\ x \in Z\}$ и $B = \{x\colon x^2 + x - 6 = 0,\ x \in Z\}$;
2) $A = \{x\colon |x| < 3,\ x \in Z\}$ и $B = \{x\colon x^2 - 2x - 3 = 0,\ x \in Z\}$;
3) $A = \{x\colon x^2 - 5x + 6 \leqslant 0\}$ и $B = \{x\colon |x| \leqslant 2\}$;
4) $A = \{x\colon |x - 2| < 5\}$ и $B = \{x\colon |x - 1| \leqslant 3\}$.

462. Определить, истинным или ложным является высказывание $(\forall x)\, p(x)$; $(\exists x)\, p(x)$, если предложение $p(x)$ следующее:

1) треугольник x — прямоугольный;
2) в треугольнике x все биссектрисы являются и медианами;
3) хорда x некоторой окружности является её диаметром;
4) сумма внутренних углов треугольника x равна $180°$;
5) сумма внутренних углов четырёхугольника x равна $270°$;
6) чётное число x делится на 4;
7) чётное число x делится на 3;
8) квадратный трёхчлен x не имеет действительных корней.

463. Сформулировать теорему, обратную данной теореме:

1) если числа x и y чётные, то число $x + y$ чётно;
2) если $a > 0$ и $b > 0$, то $ab > 0$;
3) если треугольник x прямоугольный, то сумма его острых углов равна $90°$;
4) если отрезок x является средней линией треугольника, то он параллелен одной из сторон этого треугольника.

Установить, истинной или ложной является полученная теорема.

464. Найти середины сторон треугольника ABC, если:
1) $A\,(0; 2)$, $B\,(-6; 0)$, $C\,(-2; -4)$;
2) $A\,(-4; 0)$, $B\,(0; 6)$, $C\,(2; -2)$.

465. Точка M — середина отрезка AB. Найти координаты точки B, если:
1) $M\,(5; -7)$, $A\,(-3; 1)$; 2) $M\,(-5; 3)$, $A\,(9; -7)$.

466. На прямой $x = 2$ найти точку, равноудалённую от точек $A\,(3; 1)$ и $B\,(-2; 2)$.

467. На прямой $y = -3$ найти точку, равноудалённую от точек $M\,(4; -3)$ и $N\,(1; 3)$.

468. Записать уравнение окружности, описанной около прямоугольного треугольника с гипотенузой AB, если:
1) $A\,(0; 6)$, $B\,(-2; -4)$; 2) $A\,(-6; 2)$, $B\,(4; 0)$.

469. Найти координаты центра окружности радиуса 3, лежащего на оси ординат, при условии, что окружность проходит через точку $A\,(-2; 3)$.

470. Найти координаты центра окружности радиуса 4, лежащего на оси абсцисс, при условии, что окружность проходит через точку $B\,(4; -3)$.

471. Найти координаты точек пересечения окружностей, заданных уравнениями:
1) $x^2 + y^2 = 1$ и $x^2 + y^2 + x + y - 2 = 0$;
2) $x^2 + y^2 = 4$ и $x^2 + y^2 + x + y - 6 = 0$.

472. Составить уравнения прямых, содержащих медианы треугольника ABC, если:
1) $A\,(0; 2)$, $B\,(-4; 0)$, $C\,(1; -1)$;
2) $A\,(5; 0)$, $B\,(0; -3)$, $C\,(-1; 1)$.

473. Найти координаты точек пересечения прямых, заданных уравнениями:
1) $-3x - y = 1$ и $5x + 3y = 5$;
2) $4x + y = -2$ и $3x - 2y = 15$.

474. Определить фигуру, заданную уравнением:
1) $(x - 5)^2 + (2y + 1)^2 = 0$; 2) $(3x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 0$;
3) $(x + 7)(y - 6) = 0$; 4) $(x - 8)(y + 9) = 0$;
5) $3x^2 - 4y^2 = 0$; 6) $9x^2 - 5y^2 = 0$.

475. Изобразить множество точек координатной плоскости, удовлетворяющих системе неравенств:

1) $\begin{cases} 4x + y \leqslant 2, \\ 2x - y < 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x - y \geqslant 1, \\ 2x + y > 4; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5x - 2y > -1, \\ -3x + 2y \geqslant -2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} -4x + 3y < -3, \\ 3x - 2y \leqslant -2; \end{cases}$

5) $\begin{cases}(x+0{,}5)^2+(y-1{,}5)^2>9,\\ x-y<2;\end{cases}$ 6) $\begin{cases}(x-2{,}5)^2+(y-0{,}5)^2\geqslant 16,\\ x-y>-1;\end{cases}$

7) $\begin{cases}x^2+y^2\geqslant 4,\\ x^2+y^2\leqslant 25;\end{cases}$ 8) $\begin{cases}x^2+y^2<16,\\ x^2+y^2>9.\end{cases}$

476. Определить фигуру, заданную системой уравнений:

1) $\begin{cases}y=|x|-1,\\ x^2+(y+2)^2=4;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x^2+(y-1)^2=9,\\ y=|x|+2;\end{cases}$

3) $\begin{cases}y=(x+1)^2+1,\\ (x+1)^2+(y+1)^2=9;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}y=(x+1)^2-1,\\ (x+1)^2+(y+2)^2=4;\end{cases}$

5) $\begin{cases}(x-1)^2+y^2=4,\\ y=\sqrt{x-2};\end{cases}$ 6) $\begin{cases}(x+2)^2+y^2=9,\\ y=\sqrt{x+1}.\end{cases}$

ПРАКТИЧЕСКИЕ И ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ

1. Из букв слова *множество* составить всевозможные слова (имена существительные, имеющие смысл в русском языке). Каждую букву в составляемом слове можно использовать не большее число раз, чем она встречается в слове *множество*.
2. Иностранные языки изучают 25 учащихся. Из них 19 человек изучают английский язык, а 16 — немецкий. Других иностранных языков никто не изучает. Сколько человек изучают два языка?
3. Каждый из 13 учеников класса занимается хотя бы одним из видов спорта: плаваньем или футболом. Семь человек занимаются плаваньем, четверо занимаются двумя видами спорта. Сколько человек занимается футболом?
4. В международной конференции участвовало 100 человек. Из них 40 человек владело русским языком, 55 — английским, 45 — немецким, 18 — русским и английским, 20 — английским и немецким; никто не знал одновременно русский и немецкий языки и никто не владел всеми тремя языками. Какое число участников конференции не владело ни одним из этих языков?
5. При подведении итогов районных олимпиад по информатике, математике и литературе оказалось, что в одной школе учатся 20 победителей, причём каждый победил хотя бы в одной олимпиаде. Из них 16 человек победили в олимпиаде по информатике, 10 человек — по литературе, 8 — по математике. При этом 6 человек оказались победителями по математике и по литературе, 6 человек — по математике и информатике, а 5 — победителями по всем трём предметам. Сколько человек победили в олимпиадах по литературе и информатике одновременно?

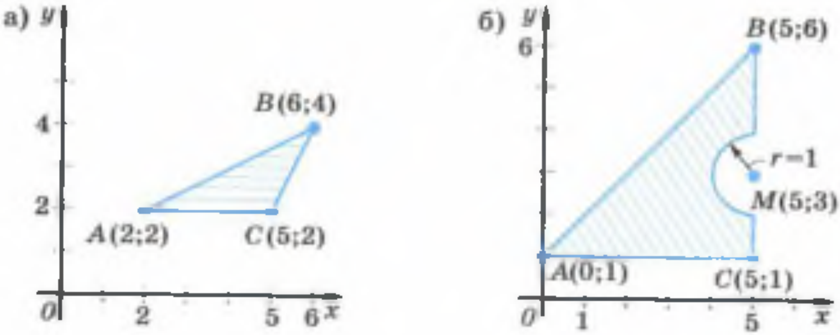


Рис. 73

6. Описать пересечение множеств натуральных чисел:
   1) кратных 3 и кратных 5; 2) кратных 6 и кратных 18.
7. Элементами множества A являются все простые числа, меньшие 50; элементами множества B — натуральные числа, оканчивающиеся цифрой 3. Найти: 1) $A \cup B$; 2) $A \cap B$.
8. Придумать признаки, по которым можно классифицировать: 1) учащихся класса; 2) грибы; 3) телевизоры; 4) напитки.
9. Установить, верно ли высказывание:
   1) любая берёза — дерево;
   2) любое дерево — берёза;
   3) каждое насекомое имеет 4 крыла;
   4) каждый квадрат является прямоугольником;
   5) любой прямоугольник является квадратом;
   6) любой равнобедренный треугольник — прямоугольный;
   7) существует равнобедренный треугольник, являющийся прямоугольным;
   8) существует девочка с именем Анна;
   9) не существует мальчика с именем Пётр;
   10) не существует треугольника со сторонами 1, 3, 5.
10. Записать с помощью системы неравенств множество точек заштрихованной части координатной плоскости (рис. 73).
11. С поля на овощную базу перевозят овощи автомашинами грузоподъёмностью 5 т и 10 т. За 1 ч база может принять не более 10 машин, при этом не более 8 машин по 5 т и не более 6 машин по 10 т. Сколько машин по 5 т и сколько машин по 10 т нужно отправлять с поля на базу за 1 ч, чтобы перевозить наибольшее количество овощей?
12. На птицеферме употребляются два вида кормов — I и II. В единице массы корма I содержится единица вещества A, единица вещества B и единица вещества C. В единице массы корма II содержится 4 единицы вещества A, 2 единицы вещества B и не содержится вещество C. В дневной рацион каждой птицы

нужно включать не менее единицы вещества A, не менее 4 единиц вещества B и не менее единицы вещества C. Цена единицы массы корма I составляет 3 у. е., корма II — 2 у. е. Составить ежедневный рацион кормления птиц так, чтобы стоимость его была наименьшей.

В этой главе вы узнали,

что такое:

— множество и его элементы;
— характеристическое свойство множества;
— подмножество множества; пустое множество;
— разность множеств A и B;
— объединение и пересечение двух множеств;
— дополнение множества A до множества B, если $A \subset B$;
— система и совокупность уравнений;
— истинные и ложные высказывания;
— отрицание высказывания;
— предложение с переменной;
— множество истинности предложения с переменной;
— символы общности и существования;
— контрпример;
— следование и равносильность;
— равносильные: уравнения, системы уравнений, неравенства;
— уравнения-следствия;
— прямая и обратная теоремы;
— уравнение прямой;
— уравнение окружности;

как:

— задавать множество;
— находить: подмножества некоторого множества; объединение и пересечение двух множеств; разность двух множеств A и B; дополнение множества A до множества B, если $A \subset B$;
— определять истинность или ложность высказывания, предложения с переменной;
— опровергать высказывания вида $(\forall x)\, p(x)$;
— формулировать теорему, обратную данной;
— совершать равносильные преобразования уравнений, систем уравнений и неравенств;
— определять расстояние между двумя точками на плоскости, заданными своими координатами;
— записывать уравнение окружности; прямой;
— изображать в прямоугольной системе координат фигуры, заданные с помощью уравнений, неравенств, их систем и совокупностей.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

I уровень

1. Найти объединение и пересечение:
   1) множеств $A = \{2; 1; 0; 3\}$ и $B = \{-2; 0; -1; 1\}$;
   2) отрезков $[-7; 2]$ и $[-3; 1]$.
2. Сформулировать высказывание $\bar{v}$, если известно высказывание v:
   а) $100 > 32$; б) число 3 является чётным числом.
3. Записать уравнение окружности с центром в точке $C(-2; 5)$ радиуса $r = 7$.
4. Найти расстояние между точками $A(-8; 1)$ и $B(-6; -2)$.
5. На координатной плоскости штриховкой показать множества точек, удовлетворяющих неравенству:
   1) $3x - y < 5$; 2) $(x-4)^2 + (y+3)^2 \geqslant 4$.

II уровень

6. Найти объединение и пересечение множеств M и P, если:
   а) $M = \{x: x^2 + 3x - 10 = 0\}$ и $P = \{-7; 0; 2\}$;
   б) $M = \{x: -3 \leqslant x \leqslant 4\}$ и $P = \{x: 0 < x < 5\}$.
7. Найти дополнение множества $A = \{x: 2 < x < 3\}$ до множества $B = \{x: -2 < x < 5\}$.
8. Сформулировать высказывание $\bar{v}$, если известно высказывание v: а) $23 \leqslant 10$; б) прямые a и b перпендикулярны.
9. Найти координаты точки C — середины отрезка AB, если $A(-5; 6)$, $B(3; 2)$.
10. На координатной плоскости штриховкой показать множество точек, удовлетворяющих системе неравенств
$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y+1)^2 \leqslant 4, \\ x - 2y - 2 \geqslant 0. \end{cases}$$

III уровень

11. Найти объединение и пересечение множеств A и B, если: $A = \{x: x^2 - x - 12 < 0\}$, $B = \{x: x^2 - 3x - 10 \geqslant 0\}$.
12. Сформулировать теорему, обратную данной: «При пересечении двух параллельных прямых секущей накрест лежащие углы равны».
13. Определить вид фигуры, заданной системой уравнений
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 10x - 2y - 10 = 0, \\ y = x^3 + 2. \end{cases}$$
14. Сколько подмножеств имеет множество, содержащее 6 элементов?
15. Решить неравенство $|x^2 - 5x + 6| < |x^2 - 7x + 10|$.

ТЕМЫ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ РАБОТ

1. Наивная теория множеств Б. Больцано.
2. Г. Кантор и его вклад в развитие теории множеств.
3. Вклад в развитие математики группы учёных Н. Бурбаки.
4. Счётные и несчётные множества.
5. Парадокс брадобрея и другие парадоксы теории множеств.
6. Метод доказательства от противного.
7. Понятие мощности множества. Равномощные множества.
8. Отображение. Биекция. Теоретико-множественное определение понятия функции.
9. Законы логики в трудах Платона и Аристотеля.
10. Этапы развития формальной логики.
11. Законы формальной логики. Законы де Моргана.
12. Классификация объектов исследования и наблюдения.

Упражнения для повторения курса алгебры IX класса

477. Найти значение выражения:

1) $2\cdot 10^{-1}+\left(6^0-\frac{1}{6}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{3}\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)^{-1}$;

2) $\left(-\frac{2}{5}\right)^{-2}-(-1{,}5)^{-2}\cdot(-1{,}5)^{3}-(0{,}75)^{0}+81\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^{-4}$.

478. Сравнить значения выражений:

1) $\left(\sqrt{2}-1\right)^3-\left(\sqrt{2}+1\right)^3$ и $(-2)^{-7}\cdot(-4)^5$;

2) $\left(\sqrt{3}-1\right)^3-\left(\sqrt{3}+1\right)^3$ и $(-8)^{-2}\cdot 2^7\cdot(-0{,}1)^{-1}$.

479. Решить уравнение:

1) $2\sqrt[3]{x}+9=4+\sqrt[3]{x}$; 2) $\left(\sqrt[3]{x}-1\right)^2=\sqrt[3]{x^2}$.

480. Извлечь корень:

1) $\sqrt[3]{2\frac{10}{27}}$; 2) $\sqrt{5\frac{4}{9}}$; 3) $\sqrt[3]{\frac{8b^6}{343a^9}}$, где $a\neq 0$; 4) $\sqrt[4]{\frac{16x^8}{81y^4}}$, где $y>0$.

481. Упростить:

1) $\left(3\sqrt{20}+7\sqrt{15}-\sqrt{5}\right):\sqrt{5}$; 2) $\left(\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{14}+\sqrt[3]{56}\right):\sqrt[3]{7}$;

3) $2\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{6}-3\sqrt{\frac{2}{3}}$; 4) $7\sqrt{1\frac{3}{4}}-\sqrt{7}+0{,}5\sqrt{343}$.

482. Сравнить значения выражений:

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{\sqrt{5}}{3}}$ и $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{\sqrt{5}}{3}}$; 2) $(0{,}3)^{\sqrt{2}}$ и $(0{,}37)^{\sqrt{2}}$.

483. Вынести множитель из-под знака корня:

1) $\sqrt{9a^2b}$, где $a<0$, $b>0$; 2) $\sqrt{25a^2b^3}$, где $a>0$, $b>0$;

3) $\sqrt{8a^3b^5}$, где $a<0$, $b<0$; 4) $\sqrt{121a^3b^3}$, где $a<0$, $b<0$.

484. Внести множитель под знак корня:

1) $x\sqrt{5}$, где $x\geqslant 0$; 2) $x\sqrt{3}$, где $x<0$;

3) $-a\sqrt{3}$, где $a\geqslant 0$; 4) $-a\sqrt{5}$, где $a<0$.

485. Решить уравнение:

1) $x^{\frac{1}{2}}=2$; 2) $x^{-\frac{1}{2}}=3$; 3) $x^{-3}=8$; 4) $x^{\frac{1}{2}}=0$.

486. Выяснить, принадлежит ли графику функции $y=-\frac{25}{x}$ точка:

1) $A\left(\sqrt{5};\,-5\sqrt{5}\right)$; 2) $B\left(-5\sqrt{2};\,5\sqrt{2}\right)$.

487. Выяснить, принадлежит ли графику функции $y = \sqrt{1 - 2x}$ точка:

1) $C\left(\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 2) $D\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$.

488. Найти область определения функции:

1) $y = \sqrt{-x^2 - 3x + 10}$; 2) $y = \sqrt[4]{\frac{x-7}{3-2x}}$; 3) $y = \sqrt[3]{\frac{x+4}{6-x}}$;

4) $y = \sqrt[4]{\frac{2x+15}{6}}$; 5) $y = \sqrt[4]{\frac{x}{0{,}5x+1}}$; 6) $y = \frac{\sqrt{x}}{x^2-4}$.

489. Построить график функции:

1) $y = x^2 + 6x + 10$; 2) $y = -x^2 - 7x - 6$; 3) $y = \frac{4}{x}$;

4) $y = -\frac{6}{x}$; 5) $y = \frac{x^3}{2}$; 6) $y = \frac{1}{4}x^4$.

По графику выяснить, на каких промежутках функция возрастает, убывает; является ли функция чётной или нечётной.

490. Является ли число 107 членом последовательности $a_n = 3n^2$?

491. Последовательность задана рекуррентно. Задать её формулой n-го члена: 1) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 1$; 2) $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 3a_n$.

492. Вычислить a_2, a_3, a_4, если $a_1 = 1$, $a_{n+1} = (3n+1) \cdot a_n$.

493. Вычислить n-й член арифметической прогрессии и сумму n первых членов, если:

1) $a_1 = 10$, $d = 6$, $n = 23$; 2) $a_1 = 42$, $d = 0{,}5$, $n = 12$;

3) $a_1 = 0$, $d = -2$, $n = 7$; 4) $a_1 = \frac{1}{3}$, $d = \frac{2}{3}$, $n = 18$.

494. Найти сумму n первых членов арифметической прогрессии, если $a_1 = 2$, $a_n = 120$ и $n = 20$.

495. Доказать, что последовательность, заданная формулой $a_n = \frac{1-2n}{3}$, является арифметической прогрессией.

496. Для геометрической прогрессии найти:

1) b_4, если $b_1 = 5$ и $q = -10$; 2) b_1, если $b_4 = -5000$ и $q = -10$.

497. Вычислить n-й член геометрической прогрессии и сумму n первых членов, если:

1) $b_1 = 3$, $q = 2$, $n = 5$; 2) $b_1 = 1$, $q = 5$, $n = 4$;

3) $b_1 = 8$, $q = \frac{1}{4}$, $n = 4$; 4) $b_1 = 1$, $q = -3$, $n = 5$.

498. Найти сумму n первых членов геометрической прогрессии, если $b_1 = 0{,}25$, $q = 2$, $n = 6$.

499. Используя микрокалькулятор, вычислить первую космическую скорость у поверхности Луны по формуле $v = \sqrt{aR}$, где ускорение силы тяжести на Луне $a \approx 1{,}623$ м/с^2 и радиус Луны $R \approx 1737$ км.

500. С помощью микрокалькулятора найти катет треугольника, если его гипотенуза равна 2,45 м, а другой катет 1,78 м.

501. Упростить выражение $3\sqrt{\frac{1}{3}x^2y^3} - x\sqrt{27y^3} - y\sqrt{3x^2y}$ и найти его числовое значение, если $x = \frac{1}{7}$, $y = 1\frac{1}{3}$.

502. Решить уравнение: 1) $4^{2x+5} = 256$; 2) $9^{x^2-3} = \left(\frac{1}{9}\right)^{-1}$.

503. Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} 3x + 2y - xy = 7, \\ 2x + 3y + xy = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + 2y^2 + 3xy = 28, \\ 2x^2 + y^2 + 3xy = 20. \end{cases}$

504. Упростить выражение:

1) $\frac{\sqrt{(a-b)^2}}{a-b}$, где $a > b$; 2) $\frac{\sqrt{(a-b)^2}}{a-b}$, где $b > a$;

3) $\frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{\sqrt{x^2+x+1}}$, где $x > 0$; 4) $\frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{\sqrt{x^2+x+1}}$, где $x < 0$.

505. Какое из равенств верно:

$\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$ или $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 2$?

506. Возрастает или убывает функция $y = \frac{4}{x^3}$ на промежутке $(0; +\infty)$?

507. Найти область определения функции:

1) $y = \sqrt{(x-2)(x-3)}$; 2) $y = \sqrt{x^2 - 6x}$;

3) $y = \frac{1}{x^2 - 2\sqrt{2}\,x + 2}$; 4) $y = \frac{3}{2\sqrt{3}\,x - x^2 + 3}$;

5) $y = \sqrt{\frac{(x-1)x}{x+5}}$; 6) $y = \sqrt{\frac{x^2-9}{x^2-2x}}$.

508. Построить график функции и установить её основные свойства:

1) $y = \frac{3}{x+1}$; 2) $y = \frac{1}{2-x}$; 3) $y = \frac{x+2}{x}$;

4) $y = \frac{3-x}{x}$; 5) $y = \sqrt{x-3}$; 6) $y = \sqrt[3]{2-x}$.

509. Решить уравнение:

1) $\sqrt{x-2}=4$; 2) $\sqrt{x+3}=8$; 3) $\sqrt{2x+1}=\sqrt{x-1}$;

4) $\sqrt[4]{x^2+12}=x$; 5) $\sqrt[3]{6x-x^2}=x$; 6) $\sqrt{3-x}=\sqrt{1+3x}$.

510. Турист, поднимаясь в гору, в первый час достиг высоты 800 м, а каждый следующий час поднимался на 25 м меньше, чем в предыдущий. За сколько часов он достигнет высоты 5700 м?

511. В арифметической прогрессии $a_1+a_5=\frac{5}{3}$, $a_3a_4=\frac{65}{72}$. Найти сумму семнадцати первых членов прогрессии.

512. Найти первые 4 члена геометрической прогрессии, у которой второй член меньше первого на 35, а третий больше четвёртого на 560.

513. В геометрической прогрессии $q=3$, $S_6=1820$. Найти b_1 и b_5.

514. Сумма трёх чисел, являющихся последовательными членами арифметической прогрессии, равна 39. Если из первого числа вычесть 4, из второго 5, а из третьего 2, то полученные числа будут тремя последовательными членами геометрической прогрессии. Найти эти числа.

515. С помощью микрокалькулятора по формуле $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}$ найти сопротивление R участка цепи, состоящего из трёх параллельно соединённых сопротивлений $R_1=24$ Ом, $R_2=12$ Ом, $R_3=32$ Ом.

516. Вычислить на микрокалькуляторе с точностью до 0,01 значения функции $y(x)$ при $x=0{,}5$; $1{,}5$; $2{,}5$; $3{,}5$, если:

1) $y(x)=x^3-6x^2+11x-4$; 2) $y(x)=x^4-9x^3+26x^2-24x$;

3) $y(x)=\frac{x^2-4x+13}{x+1}$; 4) $y(x)=\sqrt{9+4x-x^2}$.

Упростить выражение (517—518).

$\boxed{517.}$ 1) $\sqrt{5+\sqrt{21}}$; 2) $\sqrt{4+\sqrt{7}}$.

$\boxed{518.}$ 1) $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(4(a+1)+\left(\sqrt[3]{a\sqrt{a}}-1\right)^2-\left(\frac{\sqrt[6]{ab^2}+\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}+\sqrt[6]{a}\right)^{-3}\right)^{\frac{1}{2}}$, где $0<a\leqslant 1$;

2) $\frac{a^{-1}b^{-2}-a^{-2}b^{-4}}{a^{-\frac{5}{3}}b^{-2}-b^{-\frac{5}{3}}a^{-2}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}$.

$\boxed{519.}$ Построить график функции:

1) $y=\frac{1}{|x-1|}$; 2) $y=\frac{3}{|x|}-1$; 3) $y=\sqrt[3]{|x|}$; 4) $y=x^2-3|x|-4$.

520. Найти четыре числа, обладающие следующими тремя свойствами:

а) сумма первого и четвёртого чисел равна 11, а сумма второго и третьего равна 2;

б) первое, второе и третье числа являются последовательными членами арифметической прогрессии;

в) второе, третье и четвёртое числа являются последовательными членами геометрической прогрессии.

521. Три числа, сумма которых равна 78, составляют геометрическую прогрессию и являются также первым, третьим и девятым членами арифметической прогрессии. Найти эти числа.

Упражнения для повторения курса алгебры VII—IX классов

1. Числа и алгебраические преобразования

Вычислить (522—523).

522. 1) $(5{,}4 \cdot 1{,}2 - 3{,}7 : 0{,}8)(3{,}14 + 0{,}86) : 0{,}25$;

2) $(20{,}88 : 18 + 45 : 0{,}36) : (19{,}59 + 11{,}95)$;

3) $\left(5\frac{8}{9} - 3\frac{11}{12}\right) \cdot \frac{18}{71} - 7\frac{5}{6} : 15\frac{2}{3}$; 4) $\frac{7}{36} \cdot 9 + 8 \cdot \frac{11}{32} + \frac{9}{10} \cdot \frac{5}{18}$.

523. 1) $\left(3\frac{4}{25} + 20{,}24\right) \cdot 2{,}15 + \left(5{,}1625 - 2\frac{3}{16}\right) \cdot \frac{2}{5}$;

2) $0{,}364 : \frac{7}{25} + \frac{5}{16} : 0{,}125 + 2{,}5 \cdot 0{,}8$;

3) $\dfrac{\left(3{,}25 - \frac{3}{4}\right) \cdot 6{,}25}{(2 - 0{,}75) : \frac{4}{5}} + \dfrac{\left(5{,}25 - 3\frac{3}{4}\right) : 5}{(-2 - 0{,}8) \cdot 1\frac{3}{4}}$; 4) $\dfrac{\left(2\frac{3}{20} + 1\frac{5}{16}\right) : 27{,}7}{\left(1{,}75 \cdot \frac{2}{3} - 1{,}75 \cdot 1\frac{1}{8}\right) : \frac{7}{12}}$.

524. Найти неизвестный член пропорции:

1) $x : 7 = 9 : 3$; 2) $125 : 25 = 35 : x$; 3) $144 : x = 36 : 3$;

4) $\dfrac{x}{6\frac{5}{6}} = \dfrac{3{,}9}{4{,}1}$; 5) $9\frac{1}{2} : 14\frac{1}{4} = x : 0{,}75$; 6) $0{,}3 : x = \frac{4}{9} : 3\frac{1}{3}$.

525. Найти p процентов от числа a, если:

1) $a = 400$, $p = 27$; 2) $a = 2{,}5$, $p = 120$;

3) $a = 2500$, $p = 0{,}2$; 4) $a = 4{,}5$, $p = 2{,}5$.

526. Найти число, если p процентов от него равны b:
1) $p=23,\ b=690$; 2) $p=3{,}2,\ b=9{,}6$;
3) $p=125,\ b=3{,}75$; 4) $p=0{,}6,\ b=21{,}6$.

527. Какой процент составляет число a от числа b:
1) $a=24,\ b=120$; 2) $a=4{,}5,\ b=90$;
3) $a=650,\ b=13$; 4) $a=0{,}08,\ b=0{,}48$?

528. Выполнить действия:
1) $(-3a^3b)(-2ab^2)(-5a^3b^7)$; 2) $35a^5b^4c:(7ab^3c)$;
3) $(-5ab^4c)^3\cdot\left(-\frac{1}{5}a^5bc^2\right)^2$; 4) $\left(-\frac{2}{3}a^4b^3c^2\right)^3:\left(-\frac{1}{3}a^2bc^3\right)^2$.

529. Записать выражение в виде многочлена стандартного вида:
1) $(x-6)(5+x)-x^2(x^2-5x+1)$;
2) $(x+7)(5-x)-x^2(x^3+2x-1)$;
3) $(b-3a)^2+8\left(a-\frac{1}{2}b\right)\left(a+\frac{1}{2}b\right)$;
4) $(3a+6)^2+4\left(b-\frac{1}{2}a\right)\left(b+\frac{1}{2}a\right)$.

530. Найти числовое значение выражения:
1) a^3-ba^2 при $a=-0{,}6,\ b=9{,}4$;
2) ab^2+b^3 при $a=10{,}7,\ b=-0{,}7$;
3) $(m-5)(2m-3)-2m(m-4)$ при $m=\frac{3}{5}$;
4) $(3a-2)(a-4)-3a(a-2)$ при $a=\frac{3}{4}$.

531. Выполнить действия:
1) $(-15x^5+10x^4-25x^3):(-5x^2)-3(x-3)(x^2+3x+9)$;
2) $(9a^2b^3-12a^4b^4):3a^2b-b^2\cdot(2+3a^2b)$.

Разложить на множители (**532—536**).

532. 1) $1-\frac{a^2}{4}$; 2) $\frac{b^2}{9}-1$; 3) a^2-b^4; 4) b^4-9.

533. 1) $1-a+\frac{a^2}{4}$; 2) $0{,}25b^2+b+1$;
3) $49a^2-14a+1$; 4) $1+18b+81b^2$.

534. 1) $y^2-xy-y+x$; 2) $a^2-ax-x+a$;
3) $3a^2+3ab+a+b$; 4) $5a^2-5ax-7a+7x$.

535. 1) $6m^4n+12m^3n+3m^2n$; 2) $2a^5b-4a^4b+2a^3b$;
3) $a^2-2ab+b^2-y^2$; 4) $a^4+2a^2b^2+b^4-4a^2b^2$.

536. 1) $x^2+3x-28$; 2) $2x^2-12x+18$;
3) $2x^2-5x+3$; 4) x^2+x-2.

537. Сократить дробь:

1) $\frac{4-b^2}{4b+2b^2}$; 2) $\frac{b^2-9}{3b^2-9b}$; 3) $\frac{5a^2-10ab}{ab-2b^2}$;

4) $\frac{3xy-21y^2}{4x^2-28xy}$; 5) $\frac{x^2-x-12}{x^2-16}$; 6) $\frac{x^2-x-20}{x^2-25}$;

7) $\frac{3x^2-2x-8}{2x^2-3x-2}$; 8) $\frac{2x^2+x-3}{2x^2+7x+6}$.

Упростить выражение (538—542).

538. 1) $\frac{a^5}{6c^3}:\frac{a^2}{4c^3}$; 2) $\frac{9a^2}{m^3}:\frac{6a^2}{m^5}$;

3) $\left(\frac{4a}{b^3}\right)^2\cdot\frac{b^4}{8a}$; 4) $\left(\frac{3c}{k^2}\right)^3:\frac{9c}{k^3}$;

5) $\frac{5a}{28b^2}\cdot 8ab\cdot\frac{7b}{5a^3}$; 6) $\left(-\frac{25a^4b^3}{14c^2}\right)\cdot\left(\frac{-21c}{10a^3b^3}\right)$;

7) $\frac{4x(x-1)+1}{4-x^2}:\frac{1-2x}{x-2}$; 8) $\frac{x^2-4(x-1)}{x-1}:\frac{2-x}{1-x^2}$.

539. 1) $\frac{a-3}{a+3}-\frac{a^2+27}{a^2-9}$; 2) $\frac{a^2+12}{a^2-4}-\frac{a+3}{a-2}$;

3) $\frac{a+1}{a^2-ax}-\frac{x+1}{a^2-x^2}$; 4) $\frac{3-a}{ab-a^2}-\frac{3-b}{b^2-a^2}$.

540. 1) $\frac{4}{a-b}+\frac{9}{a+b}-\frac{8a}{a^2-b^2}$; 2) $\frac{42}{4a^2-9}+\frac{8}{2a+3}+\frac{7}{3-2a}$;

3) $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2\right)ab$; 4) $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{ab}\right)ab$.

541. 1) $\frac{1}{(x+3)^2}:\frac{x}{x^2-9}-\frac{x-9}{x^2-9}$; 2) $\frac{a+6}{a^2-4}-\frac{1}{a^2-4}\cdot\frac{(a+2)^2}{a}$;

3) $a+b-\frac{a^2}{a-1}$; 4) $\frac{a^2}{a+1}-a+1$.

542. 1) $\frac{b^2}{a^2-2ab}:\left(\frac{2ab}{a^2-4b^2}-\frac{b}{a+2b}\right)$; 2) $\left(\frac{xy}{x^2-y^2}-\frac{y}{2x-2y}\right):\frac{3y}{x^2-y^2}$;

3) $\left(\frac{2xy}{x^2-9y^2}-\frac{y}{x-3y}\right):\frac{y^2}{x^2+3xy}$; 4) $\left(\frac{2a+1}{2a-1}-\frac{2a-1}{2a+1}\right):\frac{10a-5}{4a}$.

543. Упростить выражение и найти его числовое значение:

1) $\frac{a+1}{a-1}+\frac{6}{a^2-1}-\frac{a+3}{a+1}$ при $a=-9$;

2) $\frac{b+5}{b+2}-\frac{3}{b^2-4}-\frac{b+1}{b-2}$ при $b=-8$;

3) $\frac{a-2}{a-3}:\left(\frac{a^2-6a+10}{a^2-9}+\frac{2}{a+3}\right)$ при $a=-1\frac{1}{2}$;

4) $\frac{b+1}{b-4}:\left(\frac{b^2+9}{b^2-16}+\frac{2}{b+4}\right)$ при $b=4\frac{1}{3}$.

544. Вычислить:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}-3^{-2}:3^{-5}$; 2) $(-6)^0\cdot 81^{-2}\cdot 27^3$.

545. Сократить дробь:

1) $\frac{a+\sqrt{3}}{a^2-3}$; 2) $\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-2}$; 3) $\frac{y-9y^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{4}}+3}$; 4) $\frac{x+x^{\frac{1}{2}}}{x-1}$.

546. Вычислить:

1) $(6-3\sqrt{5})(6+3\sqrt{5})$; 2) $(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)$;

3) $(3\sqrt{5}-2\sqrt{20})\sqrt{5}$; 4) $(1-\sqrt{3})^2+(1+\sqrt{3})^2$.

547. Упростить выражение:

1) $4\sqrt{3}-\sqrt{3}(\sqrt{16}-\sqrt{3})$; 2) $6\sqrt{2}-\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{36})$;

3) $\sqrt{48}-\sqrt{27}-\frac{1}{2}\sqrt{12}$; 4) $\sqrt{50}-\sqrt{32}-\frac{1}{3}\sqrt{18}$;

5) $(\sqrt{2}+3)^2-3\sqrt{8}$; 6) $(2-\sqrt{3})^2+2\sqrt{12}$.

548. Вычислить:

1) $\left(\sqrt{4+\sqrt{7}}+\sqrt{4-\sqrt{7}}\right)^2$; 2) $\left(\sqrt{3-\sqrt{5}}-\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^2$;

3) $\frac{1}{5-\sqrt{5}}-\frac{1}{5+\sqrt{5}}$; 4) $\frac{1}{7+4\sqrt{3}}+\frac{1}{7-4\sqrt{3}}$.

549. Упростить:

1) $\frac{1}{3-\sqrt{2}}+\frac{1}{3+\sqrt{2}}$; 2) $\frac{1}{5-\sqrt{3}}-\frac{1}{5+\sqrt{3}}$;

3) $\frac{3-\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}-\frac{3+\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}$; 4) $\frac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\frac{3}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

550. Представить число в стандартном виде:

1) 0,00051; 2) $\frac{1}{500}$; 3) 250 000; 4) $\frac{3}{2500}$.

551. Вычислить:

1) $\frac{(0,25)^5\cdot 8^6}{2^8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3}$; 2) $\frac{16\cdot 4^{-2}+4\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}{4+\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{1}{2}}}$.

552. Вычислить:

1) $\sqrt{8{,}75^3+8{,}75^2\cdot 7{,}25}$; 2) $\dfrac{0{,}625\cdot 6{,}75^2-3{,}25^2\cdot 0{,}625}{\sqrt{3{,}5^2+7\cdot 2{,}75+2{,}75^2}}$.

553. Упростить при $x>0$, $y>0$:

1) $\sqrt{\dfrac{4}{81}x^6y^{20}}$; 2) $\sqrt{x^4y^{18}}$; 3) $\sqrt[3]{27x^3y^6}$; 4) $\sqrt[5]{x^5y^{10}}$.

554. Упростить выражение:

1) $\left(\dfrac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}{a-b}\right)\cdot\dfrac{a-2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b}{a+b}$; 2) $\left(\dfrac{1}{a^{\frac{1}{2}}+a}-\dfrac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+1}\right)\cdot\dfrac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-1}$;

3) $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x^{\frac{1}{2}}}\cdot\left(\dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{1-x^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}-x}\right)$; 4) $\dfrac{m+2m^{\frac{1}{2}}+1}{2m^{\frac{1}{2}}}\cdot\left(\dfrac{2m^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{2}}-1}-\dfrac{4m^{\frac{1}{2}}}{m-1}\right)$.

555. Лекарственное растение ромашка при сушке теряет 84% массы. Сколько ромашки должны собрать школьники, если они обязались высушить и сдать 16 кг этого растения?

556. Завод дважды в течение года увеличивал выпуск продукции на одно и то же число процентов. Найти это число, если известно, что в начале года завод выпускал 1200 изделий, а в конце года стал выпускать 1452 изделия.

557. Два сплава состоят из цинка, меди и олова. Известно, что первый сплав содержит 40% олова, а второй — 26% меди. Процентное содержание цинка в обоих сплавах одинаково. Из 300 кг первого сплава и 500 кг второго получен новый сплав, содержащий 30% цинка. Определить, сколько килограммов олова содержится в новом сплаве.

558. Автомобиль в соответствии с паспортными данными расходовал 8,8 л бензина на 100 км пути при скорости 80 км/ч; 1 л бензина стоил 4 р. При движении со скоростями выше рекомендованных расход топлива в среднем повышался на 25%. На сколько дороже обходилась поездка на расстояние 500 км по автостраде при езде с повышенными скоростями?

559. Записать выражение в виде многочлена стандартного вида:

1) $(5a^2+3a-1)(2a^2-4a+2)$; 2) $\left(\dfrac{2}{3}m^2-\dfrac{3}{4}n\right)^2$;

3) $(3m^2-6m+7)(-2m^2+5m-1)$; 4) $(a^2b-3b^2)^2$.

Разложить на множители (560—562).

560. 1) $4x^8-81y^4$; 2) $16a^6-25b^8$; 3) $(x+y)^2-z^2$; 4) $m^2-(n-k)^2$;

5) $25x^4y^6-\frac{9}{16}a^8b^6$; 6) $\frac{1}{25}a^6b^2-\frac{4}{49}c^8$;

7) $(x+y)^2-16(x-y)^2$; 8) $(a+b)^2+4(a+b)+4$.

561. 1) $4a^{10}b^8+4a^5b^4+1$; 2) $4a^2-12ab^2+9b^4$;
3) $16a^4c^6-8a^2c^3+1$; 4) $25b^4+40ab^2+16a^2$.

562. 1) $8a^3b+3a^3by+3a^2bxy+8a^2bx$; 2) $5a^3c+10a^2-6bc-3abc^2$;
3) $25x^3-15x^2y-20xy^2+12y^3$; 4) $8xy^3-24y^2-7axy+21a$.

563. Упростить выражение:

1) $\left(1-\frac{1}{a+b}\right)\left(1+\frac{1}{a+b}\right)^{-1}$; 2) $\left(a-b+\frac{4ab}{a-b}\right):\left(a+b-\frac{4ab}{a+b}\right)$;

3) $\left(m-\frac{2}{m+n}\right)\left(m+\frac{2}{m+n}\right)+\frac{4}{(m+n)^2}$;

4) $\left(a-2b-\frac{a^2-b^2}{a+b}\right):\left(2a-b+\frac{a^2-b^2}{a-b}\right)$.

564. Упростить выражение и найти его числовое значение:

1) $\frac{a+2}{a-5}:\left(\frac{a^2+a+19}{a^2-25}+\frac{3}{a+5}\right)$ при $a=-1\frac{1}{2}$;

2) $\frac{a-3}{2+a}:\left(\frac{a^2-3a+3}{4-a^2}+\frac{3}{2+a}\right)$ при $a=\frac{1}{2}$.

565. Вычислить:

1) $(5\cdot 10^{-2}-3\cdot 5^{-1}):10^{-2}$; 2) $\left(1\frac{1}{2}\right)^{-3}:\left(\frac{2}{3}\right)^{5}+\left(1\frac{1}{3}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}$;

3) $\frac{3\cdot 2^{-1}-2\cdot 3^{-1}}{\left(1\frac{1}{5}\right)^{-1}}$; 4) $\frac{\left(3\frac{1}{7}\right)^{-1}+\left(4\frac{2}{5}\right)^{-1}}{11^{-1}}$; 5) $\frac{4^{-1}\cdot 3^{-1}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}{5-\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}}$;

6) $3\cdot 10^{-1}\left(8^0-\frac{1}{8}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{4}\cdot\left(\frac{5}{7}\right)^{-1}$; 7) $\sqrt{6{,}8^2-3{,}2^2}$.

566. Сократить дробь:

1) $\frac{a^{-2}-b^{-2}}{a^{-1}-b^{-1}}$; 2) $\frac{y^{-1}-x^{-1}}{(x^3-y^3)(xy)^{-1}}$; 3) $\frac{a^2-b^2}{a^{-1}+b^{-1}}$; 4) $\frac{m^{\frac{3}{2}}-m}{m-1}$.

567. Вычислить:

1) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}-\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}+\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{12(\sqrt{3}-2)^2}-4\sqrt{3}$;

3) $\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2}+\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}-\sqrt{5}$; 4) $\sqrt{\frac{(\sqrt{2}-2)^2}{8}}-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

568. Упростить при $x > 0$, $y < 0$:

1) $\frac{3}{5}\sqrt{2{,}25x^{10}y^{6}}$; 2) $0{,}11\sqrt{\frac{4}{121}x^{12}y^{2}}$.

569. Упростить выражение и найти его значение:

1) $\dfrac{m^{\frac{1}{2}}n^{\frac{1}{5}}+n^{\frac{1}{3}}}{m+m^{\frac{1}{2}}n^{\frac{2}{15}}}$ при $m=0{,}04$, $n=243$;

2) $\dfrac{m^{\frac{1}{2}}n^{-2}-n^{-\frac{3}{2}}}{m^{\frac{3}{4}}-m^{\frac{1}{4}}n^{\frac{1}{2}}}$ при $m=81$, $n=0{,}1$;

3) $\left(1+\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}\right)\cdot\left(1-\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}\right)$ при $a=5$, $x=4$;

4) $\dfrac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{a-\sqrt{a^2-x^2}}-\dfrac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{a+\sqrt{a^2-x^2}}$ при $a=3$, $x=\sqrt{5}$.

Упростить **(570—571)**.

570. 1) $6n\cdot\sqrt{\dfrac{m}{2n}}\cdot\sqrt{18mn}$; 2) $\dfrac{m+n}{m+2\sqrt{mn}+n}:\left(\dfrac{\sqrt{m}+\sqrt{n}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}-\dfrac{2\sqrt{mn}}{m-n}\right)$;

3) $\dfrac{a-1}{a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}}\cdot\dfrac{a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{2}}+1}\cdot a^{\frac{1}{4}}$; 4) $\left(\dfrac{4}{4-a}+\dfrac{2-a^{\frac{1}{2}}}{2a^{\frac{1}{2}}+a}\right):\dfrac{16+8a+a^2}{a^{\frac{3}{2}}}$.

571. 1) $\left(\dfrac{a\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-1}+\sqrt{a}\right):\dfrac{a-1}{\sqrt{a}-1}$; 2) $\left(\dfrac{1+b\sqrt{b}}{1+\sqrt{b}}-\sqrt{b}\right)\cdot\dfrac{1+\sqrt{b}}{1-b}$;

3) $\left(\dfrac{1-a}{1-\sqrt{a}}+a\right)\cdot(1-\sqrt{a})$; 4) $\left(m+\dfrac{1-m}{1+\sqrt{m}}\right)\cdot(1+\sqrt{m})$.

2. Уравнения

Решить уравнение (572—577).

572. 1) $8(3x-7)-3(8-x)=5(2x+1)$;

2) $10(2x-1)-9(x-2)+4(5x+8)=71$;

3) $3+x(5-x)=(2-x)(x+3)$;

4) $7-x(3+x)=(x+2)(5-x)$.

573. 1) $\dfrac{5x-7}{6}-\dfrac{x+2}{7}=2$; 2) $\dfrac{4x-8}{3}-\dfrac{3+2x}{5}=8$;

3) $\dfrac{14-x}{4}+\dfrac{3x+1}{5}=3$; 4) $\dfrac{2x-5}{4}-\dfrac{6x+1}{8}=2$.

574. 1) $\frac{4}{3(x+2)}=\frac{9}{8x+11}$; 2) $\frac{1}{3(x-1)}=\frac{3}{2(x+6)}$;

3) $\frac{x}{5-x}+\frac{5-x}{5+x}=-2$; 4) $\frac{x+3}{x-3}+\frac{x}{x+3}=2$.

575. 1) $x(x-1)=0$; 2) $(x+2)(x-3)=0$;

3) $x\left(2x-\frac{1}{2}\right)(4+3x)=0$; 4) $\frac{(x-5)(x+1)}{x^2+1}=0$.

576. 1) $x^2+3x=0$; 2) $5x-x^2=0$; 3) $4x+5x^2=0$;
4) $-6x^2-x=0$; 5) $2x^2-32=0$; 6) $x^2-8=0$;

7) $\left(\frac{x}{2}\right)^2-1=0$; 8) $2-\frac{x^2}{2}=0$.

577. 1) $2x^2+x-10=0$; 2) $2x^2-x-3=0$;
3) $7x^2-13x-2=0$; 4) $4x^2-17x-15=0$.

578. Выяснить, имеет ли корни уравнение:
1) $x^2+7x+13=0$; 2) $x^2-8x+18=0$;
3) $3x^2-2x-2=0$; 4) $5x^2-4x-1=0$.

Решить уравнение (579—584).

579. 1) $(3x+4)^2+3(x-2)=46$; 2) $2(1-1{,}5x)+2(x-2)^2=1$;
3) $(5x-3)(x+2)-(x+4)^2=0$; 4) $x(11-6x)-20+(2x-5)^2=0$.

580. 1) $|x|=\frac{1}{2}$; 2) $|x-1|=4$; 3) $|3-x|=2$;

4) $|3x|-3x=6$; 5) $|2{,}5-x|+3=5$; 6) $|3{,}7+x|-2=6$.

581. 1) $\frac{7}{2x+9}-6=5x$; 2) $\frac{x^2}{x-2}-\frac{x+2}{x-2}=4$;

3) $\frac{x}{x^2-16}+\frac{x-1}{x+4}=1$; 4) $\frac{12}{(x+6)^2}+\frac{x}{x+6}=1$.

582. 1) $x^4-17x^2+16=0$; 2) $x^4-37x^2+36=0$;
3) $2x^4-5x^2-12=0$; 4) $x^4-3x^2-4=0$.

$\boxed{583.}$ 1) $\sqrt{x+1}-5=0$; 2) $6-\sqrt{x+3}=0$;

3) $\sqrt{5-x}-1=0$; 4) $3+\sqrt{x-5}=x-4$;

5) $7x-\sqrt{2x+2}=5x$; 6) $12x-\sqrt{5x-4}=11x$.

584. 1) $x^4-5x^3+8x^2-5x+1=0$; 2) $x^4+x^3-18x^2+x+1=0$.

585. Решить графически уравнение:

1) $x^3=3x+2$; 2) $x^3=-x-2$; 3) $\frac{5}{x}=6-x$;

4) $x^{-1}=2x-1$; 5) $\sqrt{x}=\frac{x+3}{4}$; 6) $\sqrt{x}=6-x$.

Решить систему уравнений (586—588).

586. 1) $\begin{cases} x + y = 12, \\ x - y = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 10, \\ y - x = 4; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x + 3y = 11, \\ 2x - y = 7; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x + 5y = 21, \\ 6x + 5y = 27; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 3x + 5y = 4, \\ 2x - y = 7; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 4x - 3y = 1, \\ 3x + y = -9. \end{cases}$

587. 1) $\begin{cases} \frac{2x}{3} = \frac{3y}{4} - 2, \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{1}{2}(x + 11) = \frac{1}{3}(y + 13) + 2, \\ 5x = 3y + 8; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{3}{7}x - \frac{2}{5}y = 2, \\ \frac{3}{4}x + \frac{1}{6}y = 12\frac{1}{6}; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \frac{1}{4}(x + 3y) = \frac{1}{3}(x + 2y), \\ x + 5y = 12. \end{cases}$

588. 1) $\begin{cases} x - y = 7, \\ xy = 18; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y = 2, \\ xy = 15; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x + y = 2, \\ xy = -15; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x + y = -5, \\ xy = -36; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ xy = 6; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 41, \\ xy = 20. \end{cases}$

Решить уравнение (589—594).

589. 1) $\frac{4(7 - 8x)}{5} + 3(4x + 1) = \frac{12x + 17}{2}$;

2) $2(5x - 24) - \frac{x + 16}{11} = \frac{7x - 2}{4}$;

3) $\frac{2x + 3}{5} + \left(7x - \frac{3 - x}{2}\right) = \frac{7x + 11}{3} + 1$;

4) $\frac{6x + 5}{2} - \left(2x + \frac{2x + 1}{2}\right) = \frac{10x + 3}{4}$.

590. 1) $2x = 1 - x\sqrt{3}$; 2) $x\sqrt{5} - 12 = x$;

3) $x\sqrt{5} + 3 = x\sqrt{3} + 5$; 4) $2x\sqrt{6} - \sqrt{3} = 2\sqrt{6} + x\sqrt{3}$.

591. 1) $\sqrt{x^2} = 1$; 2) $\sqrt{(x - 1)^2} = 1$;

3) $\sqrt{(x - 1)^2} = x - 1$; 4) $\sqrt{(x - 1)^2} = 1 - x$.

592. 1) $\frac{x + 2}{x - 2} - \frac{x(x - 4)}{x^2 - 4} = \frac{x - 2}{x + 2} - \frac{4(3 + x)}{4 - x^2}$;

2) $1 + \frac{2}{x - 1} - \frac{6}{x^2 - 1} = \frac{3}{x + 1}$; 3) $\frac{6}{4x^2 - 1} + \frac{3}{2x + 1} = \frac{2}{2x - 1} + 1$;

4) $\frac{x + 1}{x - 2} - \frac{x + 1}{x - 1} = \frac{4}{(x - 1)(x - 2)} - \frac{x - 1}{x - 2}$.

593. 1) $\frac{x^2}{x+1}-\frac{4x}{x+2}=1-\frac{7x+6}{x^2+3x+2}$;

2) $\frac{2x^2}{x^2-x}+\frac{3x-2}{x^2-1}-\frac{3}{x^3-x}=\frac{2}{x-1}-\frac{2x}{x^2-1}$.

594. 1) $\sqrt{3x+4}-\sqrt{x+9}=1$; 2) $\sqrt{21+x}-\sqrt{28-3x}=1$;

3) $\sqrt{5x+3}=\frac{3x+1}{\sqrt{5x-3}}$; 4) $\sqrt{2x-3}=\frac{9}{\sqrt{5x+12}}$;

5) $\sqrt{9-5x}+\frac{4}{\sqrt{3+x}}=2\sqrt{3+x}$;

6) $\frac{2}{\sqrt{3x+1}}+\sqrt{3x+1}=\sqrt{5x+9}$.

Решить уравнение относительно x ($a\neq 0$, $b\neq 0$):

595. 1) $x^2-ax=0$; 2) $ax^2-x=0$; 3) $ax^2+bx=0$;

4) $\frac{x^2}{a}+\frac{x}{b}=0$; 5) $\frac{ax^2}{b}+x=0$; 6) $\frac{ax^2}{b}-\frac{x}{a}=0$.

596. 1) $x^2-5ax-6a^2=0$; 2) $x^2-7ax+10a^2=0$;
3) $x^2-6ax+9a^2-b^2=0$; 4) $x^2-4ax-b^2+4a^2=0$.

Решить систему уравнений (597—598).

597. 1) $\begin{cases}2y-3x=1,\\3x+5y=34;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}10x-3y=38,\\6x+5y=50;\end{cases}$

3) $\begin{cases}6x-15y=12,\\4x-9y=10;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}14y-9x=5,\\12x+21y=33.\end{cases}$

598. 1) $\begin{cases}x^2-5y^2=-1,\\3xy+7y^2=1;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}3y^2-2xy=160,\\y^2-3xy-2x^2=8;\end{cases}$

3) $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{2},\\\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{5}{4};\end{cases}$ 4) $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3},\\\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}=\frac{4}{3};\end{cases}$

5) $\begin{cases}2x^2+y^2+5xy=32,\\y^2-xy-2x^2=0;\end{cases}$ 6) $\begin{cases}x^2-2y^2+4xy=-45,\\y^2-xy-6x^2=0;\end{cases}$

7) $\begin{cases}27x^3-y^3=26,\\9x^2+3xy+y^2=13;\end{cases}$ 8) $\begin{cases}x^3+8y^3=12xy,\\x+2y=6.\end{cases}$

599. Показать, что система не имеет решений:

1) $\begin{cases}x-y=3,\\-2x+2y=-10;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}3x-2y=7,\\-9x+6y=21.\end{cases}$

3. Неравенства

Решить неравенство (600—601).

600. 1) $3x-7<4(x+2)$; 2) $7-6x \geqslant \frac{1}{3}(9x-1)$;

3) $1{,}5(x-4)+2{,}5x<x+6$; 4) $1{,}4(x+5)+1{,}6x>9+x$.

601. 1) $\frac{x-1}{3}-\frac{x-4}{2} \leqslant 1$; 2) $\frac{x+4}{5}-\frac{x-1}{4} \geqslant 1$;

3) $\frac{x-1}{2}+\frac{x+1}{3} \geqslant 7$; 4) $\frac{2x-5}{4}-\frac{3-2x}{5}<1$;

5) $x+\frac{x-3}{6}>3$; 6) $x+\frac{x+2}{4}<3$.

602. Решить систему неравенств:

1) $\begin{cases} x+5 \geqslant 5x-3, \\ 2x-5<0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+3 \geqslant 0, \\ x-7<4x-1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5x-1 \leqslant 7+x, \\ -0{,}2x>1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x-2 \geqslant 10-x, \\ -0{,}5x<1. \end{cases}$

603. Найти все решения неравенства, являющиеся натуральными числами:

1) $\frac{x-2}{6}-x \geqslant \frac{x-8}{3}$; 2) $\frac{x+5}{2}>\frac{x-5}{4}+x$.

604. Найти все целые числа, являющиеся решениями системы неравенств:

1) $\begin{cases} 2(x+1)<8-x, \\ -5x-9<6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3(x-1)>x-7, \\ -4x+7>-5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3y+\frac{2y-13}{11}>2, \\ \frac{y}{6}-\frac{3y-20}{9}<-\frac{2}{3}(y-7); \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \frac{y-1}{2}-\frac{y-3}{4} \geqslant \frac{y-2}{3}-y, \\ 1-y \geqslant \frac{1}{2}y-4. \end{cases}$

605. Найти все решения системы неравенств, являющиеся целыми отрицательными числами:

$$\begin{cases} \frac{3x-2}{4}+2\frac{1}{2}>\frac{2x-1}{3}-\frac{3x+2}{6}, \\ \frac{2x-5}{3}-\frac{3x-1}{2}>\frac{x-3}{5}-\frac{2x-1}{4}. \end{cases}$$

606. Решить квадратное неравенство:

1) $x^2-3x+2>0$; 2) $x^2-2x-3 \leqslant 0$;

3) $x^2-7x+12>0$; 4) $-x^2+3x-1 \geqslant 0$;

5) $3+4x+8x^2<0$; 6) $x-x^2-1 \geqslant 0$;

7) $2x^2-x-1<0$; 8) $3x^2+x-4>0$.

607. Решить неравенство:

1) $|x| > \frac{1}{5}$; 2) $|x-1| < 2\frac{1}{3}$; 3) $|x-1| > 3$; 4) $|x-1| \leqslant 2$.

608. Решить методом интервалов неравенство:

1) $(x-1)(x+3) > 0$; 2) $(x+4)(x-2) < 0$;
3) $(x+1{,}5)(x-2)x > 0$; 4) $x(x-8)(x-7) > 0$;
5) $(x-1)\left(x^2-\frac{1}{9}\right) \geqslant 0$; 6) $(x+3)\left(x^2-\frac{1}{4}\right) \leqslant 0$.

609. Сравнить числа:

1) $5\sqrt{2}$ и 7; 2) 9 и $4\sqrt{5}$; 3) $10\sqrt{11}$ и $11\sqrt{10}$;
4) $5\sqrt{6}$ и $6\sqrt{5}$; 5) $3\sqrt[3]{3}$ и $2\sqrt[3]{10}$; 6) $2\sqrt[3]{3}$ и $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{5}$.

610. Найти наибольшее целое отрицательное число, являющееся решением системы неравенств:

$$\begin{cases} \frac{x}{8}-\frac{x}{4}+\frac{x}{2} > x+5, \\ \frac{1}{8}(x+2) < -\frac{1}{7}(x-2). \end{cases}$$

611. Найти наибольшее натуральное число, являющееся решением системы неравенств:

$$\begin{cases} 5x-\frac{3-2x}{2} > \frac{7x-5}{2}+x, \\ \frac{7x-2}{3}-2x < 5-\frac{x-2}{4}. \end{cases}$$

Решить неравенство (612—615).

612. 1) $\left|\frac{x}{2}+3\right| > 2{,}5$; 2) $|3x-2| \geqslant 10$;
3) $|5x-3| < 7$; 4) $|2+5x| \leqslant 0$.

613. 1) $\sqrt{x^2} < 1$; 2) $\sqrt{x^2} > 1$;
3) $\sqrt{(x-1)^2} < 1$; 4) $\sqrt{(x-1)^2} > 1$.

614. 1) $x^5 > -32$; 2) $x^7 < 128$; 3) $x^4 > 81$; 4) $x^6 < 64$;
5) $x^{-3} > 27$; 6) $x^{-5} < -1$; 7) $x^{-8} > 1$; 8) $x^{-10} < 1$.

615. 1) $\frac{(x+3)(x-7)}{2-x} > 0$; 2) $\frac{(x+1)(4-x)}{x+5} < 0$;
3) $\frac{x^2-x-12}{x+5} \geqslant 0$; 4) $\frac{x^2-7x+12}{x-1} < 0$;
5) $\frac{(x-1)(x+2)(x-3)}{(x-4)(x+5)} < 0$; 6) $\frac{(x+7)(x-3)}{(8-x)(x+6)(x-1)} < 0$.

616. Доказать неравенство:

1) $a^2 - ab + b^2 \geqslant ab$; 2) $1 + \frac{b}{2} \geqslant \sqrt{2b}$, если $b \geqslant 0$;

3) $a^2 + a^{-2} \geqslant 2$, если $a \neq 0$; 4) $a^3 + a^{-3} \geqslant 2$, если $a > 0$.

4. Задачи на составление уравнений

617. Сумма двух чисел равна 120, а их разность равна 5. Найти эти числа.

618. На путь по течению реки катер затратил 3 ч, а на обратный путь 4,5 ч. Какова скорость течения реки, если скорость катера относительно воды 25 км/ч?

619. Моторная лодка прошла путь от A до B по течению реки за 2,4 ч, а обратный путь за 4 ч. Найти скорость течения реки, если известно, что скорость лодки относительно воды 16 км/ч.

620. Катер проплыл 15 км вниз по течению реки за 1 ч и вернулся на ту же пристань, потратив на обратный путь 1,5 ч. Найти скорость катера относительно воды и скорость течения реки.

621. Периметр равнобедренного треугольника равен 5,4 дм. Боковая сторона в 13 раз длиннее основания. Найти длины сторон.

622. Скорость рейсового трамвая новой конструкции на 5 км/ч больше, чем скорость прежнего трамвая, поэтому он проходит маршрут в 20 км на 12 мин быстрее, чем трамвай старой конструкции. За какое время новый трамвай проходит этот маршрут?

623. Некоторую часть дня автобус работает в режиме экспресса. При этом его рейсовая скорость увеличивается на 8 км/ч, а время, затраченное на маршрут в 16 км, сокращается на 4 мин. За какое время проходит этот маршрут автобус в режиме экспресса?

624. Один фермер собрал со своего участка 875 ц пшеницы, а другой с участка, меньшего на 2 га, — 920 ц пшеницы. Сколько центнеров пшеницы собрал каждый фермер с 1 га, если известно, что с 1 га второй собрал на 5 ц пшеницы больше, чем первый?

625. При одновременной работе двух насосов пруд был очищен за 2 ч 55 мин. За сколько времени мог бы очистить пруд каждый насос, работая отдельно, если один из них может эту работу выполнить на 2 ч быстрее другого?

626. Отец старше дочери в 4 раза. Пять лет назад он был старше её в 9 раз. Сколько лет сейчас отцу и дочери?

627. Поезд, отходя от станции, равномерно увеличивает скорость движения и за 25 мин достигает скорости 60 км/ч. Найти ускорение поезда.

628. Поезд, отходя от станции, равномерно увеличивает скорость и за 10 мин достигает 30 км/ч. Какое расстояние пройдёт поезд за это время?

629. Тело брошено с начальной скоростью $v_0 = 3$ м/с вертикально вниз и движется равноускоренно с ускорением $g = 9{,}8$ м/с^2. Найти время, за которое тело пройдёт расстояние $s = 137{,}5$ м.

630. Пешеход и велосипедист отправились одновременно навстречу друг другу из разных городов, расстояние между которыми 40 км. Велосипедист проехал мимо пешехода через 2 ч после отправления и на весь путь затратил на 7,5 ч меньше, чем пешеход. Найти скорость движения каждого, считая, что пешеход и велосипедист двигались все время с постоянными скоростями.

631. Водитель междугородного автобуса вынужден был по дороге заправить автобус горючим, затратив на это 12 мин. Чтобы прибыть в конечный пункт вовремя, он увеличил скорость автобуса на 15 км/ч и ликвидировал опоздание на перегоне в 60 км. С какой скоростью двигался автобус на этом перегоне?

632. Поезд прошёл мимо неподвижно стоящего на платформе человека за 6 с, а мимо платформы длиной 150 м за 15 с. Найти скорость движения поезда и его длину.

5. Функции и графики

633. Выяснить, принадлежит ли точка A графику данной функции; найти координаты точек пересечения графика этой функции с осями координат и значение функции при $x = -2$:

1) $y = 3 - 0{,}5x$, $A\,(4; 1)$;
2) $y = \frac{1}{2}x - 4$, $A\,(6; -1)$;
3) $y = 2{,}5x - 5$, $A\,(1{,}5; -1{,}25)$;
4) $y = -1{,}5x + 6$, $A\,(4{,}5; -0{,}5)$.

634. Построить графики функций (в одной координатной плоскости):

1) $y = 3x$, $y = -3x$;
2) $y = \frac{1}{3}x$, $y = -\frac{1}{3}x$;
3) $y = x - 2$, $y = x + 2$;
4) $y = -x - 2$, $y = 2 - x$.

635. Построить график функции:

1) $y = x^2 + 2\frac{1}{4}$;
2) $y = \left(x - \frac{1}{3}\right)^2$;
3) $y = (x + 2{,}5)^2 - \frac{1}{4}$;
4) $y = x^2 - 4x + 5$;
5) $y = x^2 + 2x - 3$;
6) $y = -x^2 - 3x + 4$.

636. Найти координаты вершины параболы:

1) $y = x^2 - 8x + 16$;
2) $y = x^2 - 10x + 15$;
3) $y = x^2 + 4x - 3$;
4) $y = 2x^2 - 5x + 3$.

637. Найти наибольшее или наименьшее значение функции:
1) $y = x^2 - 7x - 10$; 2) $y = -x^2 + 8x + 7$;
3) $y = x^2 - x - 6$; 4) $y = 4 - 3x - x^2$.

638. Построить в одной координатной плоскости графики двух данных функций и определить, при каких значениях аргумента равны значения этих функций:
1) $y = x^2 - 4$ и $y = 3x$; 2) $y = (x+3)^2 + 1$ и $y = -x$;
3) $y = (x+1)(x+3)$ и $y = -x - 3$; 4) $y = x^3 + 1$ и $y = x + 1$.

639. Построить эскиз графика и перечислить свойства функции:
1) $y = x^4$; 2) $y = x^3$; 3) $y = \frac{1}{x^3}$; 4) $y = \frac{1}{x^4}$.

640. Сравнить значения выражений:
1) $\sqrt[4]{5,3}$ и $\sqrt[4]{5\frac{1}{3}}$; 2) $\sqrt[3]{-\frac{2}{9}}$ и $\sqrt[3]{-\frac{1}{7}}$.

641. Построить график функции и найти значения x, при которых $y = 0$, $y > 0$, $y < 0$:
1) $y = 2x^2 - 3$; 2) $y = -2x^2 + 1$;
3) $y = 2(x-1)^2$; 4) $y = 2(x+2)^2$;
5) $y = 2(x-3)^2 + 1$; 6) $y = -3(x-1)^2 + 5$;
7) $y = x^2 + 2x - 8$; 8) $y = x^2 - 4x + 3$.

642. Найти значения коэффициентов a и b квадратичной функции $y = ax^2 + bx - 5$, если $y(-1) = 0$ и $y(1) = 6$.

643. Найти значения коэффициентов a, b и c, если известно, что график функции $y = ax^2 + bx + c$ проходит через точки $(-1; 1)$, $(1; 0)$ и $(4; 3)$.

Построить график функции (644—647).

644. 1) $y = \frac{1}{x} - 2$; 2) $y = 3 + \frac{1}{x^2}$; 3) $y = \frac{4}{x} - 1$; 4) $y = -\frac{3}{2x} + 2$.

645. 1) $y = \sqrt{x-4}$; 2) $y = -\sqrt{x} + 1,5$; 3) $y = \sqrt[3]{x+3}$; 4) $y = -\sqrt[3]{x} + 1$.

$\boxed{646.}$ 1) $y = |x - 1|$; 2) $y = |-1 + 2x|$;
3) $y = |4 - x^2|$; 4) $y = x^2 - 3|x|$.

$\boxed{647.}$ 1) $y = \begin{cases} \frac{6}{x}, & \text{если } x \geqslant 1, \\ 6x, & \text{если } x < 1; \end{cases}$ 2) $y = \begin{cases} 2, & \text{если } x \geqslant -1, \\ \frac{2}{x^2}, & \text{если } x < -1. \end{cases}$

$\boxed{648.}$ Выяснить, является ли функция чётной или нечётной:
1) $y = 2x^4 - |x|$; 2) $y = x^3 + x^2$; 3) $y = \sqrt[3]{x-1}$; 4) $y = \frac{x^3 + x}{3}$.

6. Прогрессии

649. Числовая последовательность задана формулой n-го члена $a_n = n(n+1)$. Является ли членом этой последовательности число: 1) 20; 2) 30; 3) 40?

650. Последовательность задана условием $a_1 = -1$ и рекуррентной формулой $a_{n+1} = \operatorname{tg}(45^\circ \cdot a_n)$. Вычислить следующие члены последовательности: 1) a_2; 2) a_3; 3) a_5; 4) a_{10}; 5) a_n.

651. Найти разность арифметической прогрессии, если $a_1 = 7$, $a_7 = -5$.

652. Найти первый член арифметической прогрессии, если $a_{10} = 4$, $d = 0{,}5$.

653. Вычислить первый член и сумму n первых членов арифметической прогрессии, если:
1) $a_n = 459$, $d = 10$, $n = 45$; 2) $a_n = 121$, $d = -5$, $n = 17$.

654. Найти номер n, если в арифметической прогрессии $a_1 = -2$, $a_5 = -6$, $a_n = -40$.

655. Найти сумму десяти первых членов последовательности, заданной рекуррентной формулой $b_{n+1} = -\frac{b_n}{2}$ и условием $b_1 = 1024$.

656. В геометрической прогрессии найти:
1) n, если $b_1 = 5$, $q = -10$ и $b_n = -5000$;
2) q, если $b_3 = 16$ и $b_6 = 2$;
3) b_1, если $b_3 = 16$ и $b_6 = 2$;
4) b_7, если $b_3 = 16$ и $b_5 = 1$.

657. Найти сумму чисел $3 + 6 + 12 + \ldots + 96$, если её слагаемые являются последовательными членами геометрической прогрессии.

658. Вычислить первый член и разность арифметической прогрессии, если:
1) $a_3 = 25$, $a_{10} = -3$; 2) $a_4 = 10$, $a_7 = 19$;
3) $a_3 + a_7 = 4$, $a_2 + a_{14} = -8$; 4) $a_2 + a_4 = 16$, $a_1 a_5 = 28$;
5) $S_{20} = 110$, $a_{15} - a_5 = \frac{8}{3}$; 6) $a_1 + a_2 + a_3 = 15$, $a_1 a_2 a_3 = 80$.

659. Найти десятый член арифметической прогрессии, если:
1) $a_9 = -5$ и $a_{11} = 7$; 2) $a_9 + a_{11} = -10$; 3) $a_9 + a_{10} + a_{11} = 12$.

660. Найти первый член и разность арифметической прогрессии, у которой $S_7 = -35$ и $S_{42} = -1680$.

661. Является ли геометрической прогрессией последовательность, заданная формулой n-го члена:
1) $b_n = -3^{2n}$; 2) $b_n = 2^{3n}$; 3) $b_n = \frac{3}{2n}$; 4) $b_n = \frac{(-1)^n}{2^n}$?

662. Вычислить знаменатель геометрической прогрессии, если:
1) $b_1 = 12$, $S_3 = 372$; 2) $b_1 = 1$, $S_3 = 157$;
3) $b_3 = 300$, $S_3 = 372$; 4) $b_1 = 144$, $S_3 = 157$.

663. Найти первый член, знаменатель и формулу n-го члена геометрической прогрессии, если $b_2 = -\frac{1}{2}$ и $b_4 = -\frac{1}{72}$.

664. Найти четвёртый член и знаменатель геометрической прогрессии, если $b_3 = -6$ и $b_5 = -24$.

665. Между числами $\frac{1}{3}$ и 27 вставить три числа так, чтобы получилось пять последовательных членов геометрической прогрессии.

666. В геометрической прогрессии найти:
1) b_1 и b_5, если $q = 3$, $S_5 = 484$;
2) b_1 и q, если $b_3 = 0{,}024$, $S_3 = 0{,}504$.

667. Вычислить первый член и знаменатель геометрической прогрессии, если:
1) $b_1 + b_2 = 20$, $b_2 + b_3 = 60$; 2) $b_1 + b_2 = 60$, $b_1 + b_3 = 51$.

668. В геометрической прогрессии найти:
1) S_5, если $b_4 = 88$, $q = 2$; 2) S_5, если $b_1 = 11$, $b_4 = 88$;
3) b_1, если $S_5 = 341$, $q = 2$; 4) S_5, если $b_3 = 44$, $b_5 = 176$.

669. Сумма чисел x, y, z равна 25. Числа x, $2y$, z являются последовательными членами арифметической прогрессии, а числа x, $y + 1$, z — последовательными членами геометрической прогрессии. Найти x, y, z.

670. При каком значении x числа x, $\sqrt{4 - 3x}$, $3 - 2x$ являются последовательными членами геометрической прогрессии?

671. На международном шахматном турнире в Будапеште в 1896 г. первое место занял знаменитый русский шахматист Чигорин. Участники турнира играли друг с другом один раз. Всего было сыграно 78 партий. Сколько шахматистов участвовало в этом турнире?

Вариант 1

672. Выполнить действия:

$$\frac{1-a}{1-a+a^2}-\frac{2}{1+a}+\frac{-3-7a+2a^2}{a^3+1}.$$

673. Найти целый корень уравнения $49x^2-71x+22=0$.

674. Вычислить $\sqrt{20}-\left(\sqrt{\sqrt{5}+1}-\sqrt{\sqrt{5}-1}\right)^2$.

675. График функции $y=-3x+m$ проходит через точку $(-1; 2)$. Определить значение m. Построить график и указать, при каких значениях x функция принимает отрицательные значения.

676. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x+6y=18, \\ 3x-5y=-29. \end{cases}$

Вариант 2

677. Вычислить

$$\frac{3\cdot\left(0{,}5:1{,}25+\frac{7}{5}:1\frac{4}{7}-\frac{3}{11}\right)}{\left(1{,}5+\frac{1}{4}\right):18\frac{1}{3}}.$$

678. Решить уравнение

$$\frac{3}{x-1}-\frac{4x-1}{x+1}=\frac{x^2+5}{x^2-1}-5.$$

679. Решить неравенство $3x^2-7x+4<0$.

680. Построить график функции $y=\frac{1}{2}\sqrt{x}$ и найти приближённо по графику $y(7)$.

681. Решить неравенство $|3x-7|>10$.

Вариант 3

682. Вычислить

$$\left(\frac{3{,}75+2\frac{1}{2}}{2\frac{1}{3}-1{,}875}-\frac{2{,}75-1\frac{1}{2}}{8\frac{1}{8}+1{,}5}\right):\frac{10}{11}.$$

683. Сократить дробь $\frac{x^2+2x-15}{x^2-9}$.

684. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{1+x}{5} - \dfrac{2x-y}{2} = 3y - 1, \\ \dfrac{5y-2}{2} - \dfrac{4x-5}{6} = 8 - 2x. \end{cases}$$

685. Построить график функции $y = -\dfrac{2}{x}$ и указать промежутки, на которых эта функция возрастает.

686. Бросают две игральные кости — белую и чёрную. Какова вероятность того, что появятся: 1) на обеих костях по два очка; 2) на белой кости чётное число очков, а на чёрной — кратное трём?

Вариант 4

687. Решить уравнение $(3x-4)(x-2) = 16$.

688. Решить неравенство $\dfrac{7x-2}{3} + 5x \leqslant \dfrac{11x-5}{2}$.

689. Упростить выражение

$$\left(\frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b} - \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right) \cdot \frac{2a^2-2b^2}{a^2+b^2}.$$

690. Найти пятый член геометрической прогрессии $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$, если $b_2 - b_1 = 18$, $b_3 - b_1 = 42$.

691. В вазе лежат 3 яблока, 4 груши и 5 апельсинов. Света не глядя берёт один плод из вазы. Найти вероятность того, что Света взяла: 1) грушу; 2) не апельсин.

Вариант 5

692. Вычислить $\left(7\sqrt{\dfrac{5}{7}} - 5\sqrt{\dfrac{7}{5}}\right)^2$.

693. Решить уравнение $\dfrac{3x-2}{2x+5} = \dfrac{x+4}{x-10}$.

694. Из двух городов, находящихся на расстоянии 700 км, отправились одновременно навстречу друг другу два поезда. Скорость движения одного из них на 20 км/ч больше скорости другого. Найти скорость движения каждого поезда, если известно, что они двигались без остановок и встретились через 5 ч после начала движения.

695. Решить уравнение $\sqrt{3x^2-2} = x$.

696. Указать, в каком квадранте расположена вершина параболы $y = x^2 + 7x + 10$.

Вариант 6

697. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{x-3}{5}+2>\dfrac{x-1}{10}-1, \\ x-3>\dfrac{x-4}{3}. \end{cases}$$

698. Упростить выражение $\left(\dfrac{ax-b}{a+b}-\dfrac{bx+a}{b-a}\right)\cdot\left(\dfrac{a^2-b^2}{x^2-1}:\dfrac{a^2+b^2}{x-1}\right)$.

699. Вычислить $\left(\sqrt{20}-\sqrt{45}+2\sqrt{80}+3\sqrt{125}\right)\cdot\sqrt{5}$.

700. Построить график функции $y=-x^2-8x+12$ и определить, на каком промежутке эта функция возрастает.

701. Найти моду, медиану, средний размах и дисперсию выборки: 2, 1, 1, 5, 2, 1.

Вариант 7

702. Разложить многочлен $5y^2-10y-yz+2z$ на множители.

703. Выполнить действия: $\left(a+\dfrac{b^2}{a-b}\right)\left(1-\dfrac{b^3}{a^3+b^3}\right)(a+b)$.

704. Решить уравнение $\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{5}{2}$.

705. Найти наибольшее значение функции $y=-2x^2+5x-3$.

706. Вычислить $\sqrt[3]{(0{,}008)^{-2}}$.

Вариант 8

707. Найти значение выражения

$$\left(1+x+\frac{1}{1-x}\right):\left(1+\frac{1}{1-x^2}\right) \text{ при } x=-\frac{4}{5}.$$

708. Найти область определения функции $y=\sqrt{\dfrac{x-3}{2x-1}}$.

709. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x+3y=4, \\ 0{,}5x+y=1{,}5. \end{cases}$$

710. Найти p и q, если известно, что вершина параболы

$$y=x^2+px+q$$

имеет координаты $(-1; 2)$. Построить график этой функции.

711. Вычислить $\left(1+\sqrt{7}\right)\cdot\left(4-\sqrt{7}\right)\cdot3\sqrt{7}+9\sqrt{7}$.

Вариант 9

712. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{2} - \dfrac{x-y}{3} = \dfrac{7}{6}, \\ \dfrac{x-y}{4} + \dfrac{x+y}{3} = \dfrac{5}{4}. \end{cases}$$

713. Сократить дробь $\dfrac{2a^2+5a-3}{a^2+a-6}$.

714. Найти p и q, если парабола $y=x^2+px+q$ пересекает ось абсцисс в точке $x=2$, а ось ординат в точке $y=-2$. Определить координаты вершины параболы и выяснить, при каких значениях x парабола расположена ниже оси абсцисс.

715. В геометрической прогрессии сумма первого и второго членов равна 6, а разность между первым и третьим членами равна 3. Найти сумму первых шести членов прогрессии.

Вариант 10

716. Найти целые решения системы неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{2x-3}{4} - \dfrac{3x-2}{3} < \dfrac{1}{12}, \\ \dfrac{5x+1}{2} - \dfrac{8x-1}{5} < 5. \end{cases}$$

717. Выяснить, проходит ли прямая $y=3x-2$ через точку пересечения прямых $y=2x-1$ и $y=4-3x$.

718. Сократить дробь $\dfrac{2a^2-3a-2}{a^2+3a-10}$.

719. Из города A выехал автомобиль, и одновременно навстречу ему из города B выехал автобус. Двигаясь без остановки и с постоянными скоростями, они встретились через 1 ч 12 мин после начала движения. Найти скорости автомобиля и автобуса, если автомобиль прибыл в город B на 1 ч раньше, чем автобус в город A, а расстояние между городами A и B равно 120 км.

720. В арифметической прогрессии сумма первого и шестого членов равна 11, а сумма второго и четвёртого членов равна 10. Найти сумму первых шести членов этой прогрессии.

Задачи повышенной трудности

721. Доказать, что если натуральное число не делится на 3, то остаток от деления квадрата этого числа на 3 равен 1.

722. Доказать, что при любом натуральном n число $3n+2$ не является квадратом целого числа.

723. Доказать, что:
1) число $10^{70}-361$ делится на 27;
2) число $10^{80}-298$ делится на 99;
3) число $91^{50}-19^{75}$ делится на 18;
4) число $(75\cdot 94)^{26}+(39\cdot 56)^{25}$ делится на 19.

724. Доказать, что если сумма цифр натурального числа не меняется при умножении его на 5, то это число делится на 9.

725. Пусть m, n — натуральные числа, и пусть число $m-1$ делится на 3^n. Доказать, что число m^3-1 делится на 3^{n+1}.

726. Доказать, что не существует целых чисел x, y, для которых справедливо равенство $x^2-y^2=2014$.

727. Пусть m и n — взаимно простые натуральные числа. Доказать, что не существует натуральных чисел x и y, удовлетворяющих уравнению $mx+ny=mn$.

728. Доказать, что число $7n^2+1$ не делится на 3 ни при каком натуральном n.

729. Доказать, что не существует целых чисел x и y, удовлетворяющих уравнению $15x^2=9+7y^2$.

730. Если m, n, k — натуральные числа и число $m+n+k$ делится на 6, то число $m^3+n^3+k^3$ также делится на 6. Доказать.

731. Доказать, что если натуральные числа m и n не делятся на 5, то число m^4-n^4 делится на 5.

732. Доказать, что для любых целых чисел m и n число $m^6n^2-n^6m^2$ делится на 30.

733. Доказать, что дробь $\dfrac{(n+1)^4+n^4-1}{2}$, где n — натуральное число, можно представить в виде произведения двух натуральных чисел, разность которых равна двум.

734. Доказать, что ни при каких натуральных числах m и n не может быть верным равенство:
1) $m(m+1)=n(n+2)$; 2) $m^2+(m+1)^2=n^4+(n+1)^4$.

735. Доказать, что ни при каком натуральном числе n сумма $n^3+6n^2+15n+15$ не делится на $n+2$.

736. Найти все натуральные числа n, при которых число n^4+n^2+1 является простым.

737. Найти все пары целых чисел x, y, удовлетворяющих уравнению $x^2=y^2+2y+13$.

738. Найти четыре последовательных натуральных числа, произведение которых равно 5040.

739. Пусть m, n, p, q — натуральные числа, и пусть значение многочлена mx^3+nx^2+px+q при любом целом x есть число, делящееся на 5. Доказать, что каждое из чисел m, n, p, q делится на 5.

740. Доказать, что если a, b, c — натуральные числа, то дискриминант $D=b^2-4ac$ квадратного трёхчлена ax^2+bx+c не может принимать значение, равное 63.

741. Доказать равенство:

1) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}$;

2) $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$.

742. Доказать, что если a, b, c — попарно различные числа, то при любых значениях x выполняется равенство:

1) $\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=1$;

2) $a^2\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^2\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+c^2\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=x^2$.

743. Упростить выражение:

1) $\frac{2+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{8}+4}$;

2) $\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}+\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$;

3) $\frac{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x^2-4(x-1)}}$, если $1<x<2$;

4) $\left(\frac{a+b}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}}+\frac{\sqrt[3]{ab^2}-\sqrt[3]{a^2b}}{\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}\right):(\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b})-\sqrt[6]{b}$.

744. Решить уравнение:

1) $\frac{x^2}{3}+\frac{48}{x^2}=10\left(\frac{x}{3}-\frac{4}{x}\right)$;

2) $6x^4-35x^3+62x^2-35x+6=0$;

3) $\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}=7\sqrt{2}$;

4) $2\sqrt{x^2-2x+4}-\sqrt{x^2-2x+9}=1$.

745. Найти действительные корни уравнения:

1) $x(x+1)(x+2)(x+3)=24$; 2) $x^3+(x+1)^3+(x+2)^3=(x+3)^3$.

746. Найти действительные решения системы уравнений:

1) $\begin{cases}(x^2+y^2)(x-y)=13,\\ xy(x-y)=6;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}4(x^3+y^3)=9x^2y^2,\\ 4(x^2+y^2)=9x^2y^2-8xy.\end{cases}$

747. Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases}x^3-y^3=61(x-y),\\ (x+1)(y+1)=12;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}2x^2y^2-3y^2+5xy-6=0,\\ 3x^2y^2-4y^2+3xy-2=0;\end{cases}$

3) $\begin{cases}\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=12,\\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3};\end{cases}$ 4) $\begin{cases}\dfrac{xy}{x+2y}+\dfrac{x+2y}{xy}=2,\\ \dfrac{xy}{x-2y}+\dfrac{x-2y}{xy}=4;\end{cases}$

5) $\begin{cases}x^3y+xy^3=\dfrac{10}{9}(x+y)^2,\\ x^4y+xy^4=\dfrac{2}{3}(x+y)^3;\end{cases}$ 6) $\begin{cases}\dfrac{x(y^2+1)}{x^2+y^2}=\dfrac{3}{5},\\ \dfrac{y(x^2-1)}{x^2+y^2}=\dfrac{4}{5}.\end{cases}$

748. Доказать, что система уравнений $\begin{cases}x+y+z=0,\\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=0\end{cases}$ не имеет действительных решений.

749. Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases}|x-1|+|y-5|=1,\\ y=5+|x-1|;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sqrt{5y-x}+x=3,\\ \sqrt{2y-x}+x+y=3;\end{cases}$

3) $\begin{cases}\sqrt{y+7x}+\sqrt{y+2x}=5,\\ \sqrt{y+2x}-y+x=1;\end{cases}$

4) $\begin{cases}\sqrt{25-x^2}-\sqrt{25-y^2}=\sqrt{8},\\ \sqrt{25-x^2}+\sqrt{25-y^2}=\sqrt{16+(x+y)^2}.\end{cases}$

750. Найти все действительные значения r, при которых уравнение $x^2+(4+2r)x+5+4r=0$ имеет:

1) действительные и равные корни;

2) действительные корни, равные по модулю, но противоположные по знаку.

751. Найти все действительные значения a, при которых корни уравнения $ax^2+2(a+3)x+a+2=0$ неотрицательны.

752. Найти все значения a, при которых уравнение $x^2+ax+a=0$ имеет действительные корни x_1 и x_2, удовлетворяющие условиям $x_1<x_2$, $x_1^2x_2=a^2$.

753. Найти все значения a, при которых квадратичная функция $y = x^2 + ax + a^2 + 6a$ принимает отрицательные значения при всех x, таких, что $1 < x < 2$.

754. Доказать, что если действительные числа a, b, c удовлетворяют условию $c(a + b + c) \leqslant 0$, то уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет действительные корни.

755. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$. Найти p и q, если известно, что числа $x_1 + 1$ и $x_2 + 1$ являются корнями уравнения $x^2 - p^2x + pq = 0$.

756. Найти все значения r, при которых неравенство

$$-3 < \frac{x^2 + rx - 2}{x^2 - x + 1} < 2$$

выполняется при всех значениях x.

757. Найти все значения a, для которых при всех действительных значениях x выполняется неравенство

$$ax^2 + 2(a + 2)x + 2a + 4 < 0.$$

758. Доказать, что для любых чисел x и y справедливо неравенство:
1) $x^2 + 4y^2 - 2x - 16y + 17 \geqslant 0$;
2) $5x^2 - 4xy + y^2 - 16x + 6y + 13 \geqslant 0$.

759. Доказать, что для любых чисел a, b, c справедливо неравенство:
1) $a^2 + b^2 + c^2 - 2a + 4b - 6c + 14 \geqslant 0$;
2) $(a + b + c)^2 \geqslant 3(ab + bc + ca)$;
3) $(a + b - c)^2 + (b + c - a)^2 + (a + c - b)^2 \geqslant ab + bc + ca$.

760. Доказать, что при любом натуральном числе $n > 2$ справедливо неравенство:

1) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$; 2) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}$.

761. Доказать, что для любых неотрицательных чисел a, b, c справедливо неравенство:
1) $a^3 + b^3 + c^3 \geqslant 3abc$;
2) $(a + b + c)(ab + bc + ca) \geqslant 9abc$;
3) $(a + b)(b + c)(c + a) \geqslant 8abc$;
4) $(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) \leqslant abc$.

762. Доказать, что для любых положительных чисел a, b, c справедливо неравенство:

1) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}} + \frac{1}{\sqrt{ab}}$;

2) $\frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a} + \frac{2}{a+b} \geqslant \frac{9}{a+b+c}$.

763. Доказать, что для любых положительных чисел a, b, c, d справедливо неравенство $\sqrt{(a + c)(b + d)} \geqslant \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$.

764. Пусть a, b, c — положительные числа, такие, что $abc=1$. Доказать, что $(1+a)(1+b)(1+c)\geqslant 8$.

765. Доказать, что при всех действительных значениях x справедливо неравенство $x^{12}-x^9+x^4-x+1>0$.

766. Представить многочлен x^8+x^4+1 в виде произведения трёх многочленов с целыми коэффициентами.

767. Сократить дробь:

1) $\dfrac{a^3-2a^2+5a+26}{a^3-5a^2+17a-13}$; 2) $\dfrac{2a^4+a^3+4a^2+a+2}{2a^3-a^2+a-2}$.

768. Построить график функции:

1) $y=|x-2|+|x+4|$; 2) $y=|x-3|-|x-1|$;

3) $y=\sqrt{x^2+4x+4}+\sqrt{x^2-6x+9}$;

4) $y=\sqrt{x^2+10x+25}-\sqrt{x^2-2x+1}$; 5) $y=\dfrac{3x-2}{|x-1|}$;

6) $y=\dfrac{2|x|-1}{|x|-4}$; 7) $y=\dfrac{1}{x^2-x-2}$; 8) $y=\dfrac{1}{x^2-|x|}$.

Решить неравенство (769—770).

769. 1) $\dfrac{17-42x}{5x^2-7x+2}>6$; 2) $\dfrac{15-4x}{x^2-x-12}<4$;

3) $\dfrac{x^4-3x^2-4}{x^4+8x^2-9}>0$; 4) $\dfrac{x^3-5x^2-x+5}{x^3+2x^2-9x-18}<0$;

5) $|x^2-4x|\leqslant 3x-6$; 6) $|x^2-2x-3|<|x+1|$.

770. 1) $\sqrt{1-x^2}+1<\sqrt{3-x^2}$; 2) $x+4>2\sqrt{4-x^2}$;

3) $\sqrt{x^2-6x}<8+2x$; 4) $2-3x<\sqrt{4+9x-9x^2}$;

5) $\dfrac{2x+3}{\sqrt{6x^2+7x-3}}<2$; 6) $\dfrac{2-\sqrt{x+3}}{x-1}>-\dfrac{1}{3}$.

771. Три числа, сумма которых равна 24, являются последовательными членами арифметической прогрессии. Если к этим числам прибавить соответственно 2, 2 и 7, то полученные числа будут последовательными членами геометрической прогрессии. Найти эти числа.

772. Три числа, сумма которых равна 28, являются первыми тремя членами геометрической прогрессии. Если из этих чисел вычесть соответственно 1, 3 и 9, то полученные числа будут последовательными членами арифметической прогрессии. Найти сумму первых 10 членов геометрической прогрессии.

773. Найти четыре числа, первые три из которых являются последовательными членами геометрической прогрессии, а последние три — последовательными членами арифметической прогрессии. Сумма крайних чисел равна 21, а сумма средних чисел равна 18.

774. Доказать, что если положительные числа a, b, c являются последовательными членами арифметической прогрессии, то числа

$$\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}, \quad \frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}, \quad \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

также являются последовательными членами арифметической прогрессии.

775. Доказать, что если положительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ являются последовательными членами арифметической прогрессии, то

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=\frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}.$$

776. Пусть числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ являются последовательными членами арифметической прогрессии, S_n — сумма n первых членов этой прогрессии. Доказать, что:

1) если $S_m = S_n$, то $S_{m+n} = 0$; 2) $S_{n+3} = 3S_{n+2} - 3S_{n+1} + S_n$;

3) если $\frac{S_m}{S_n} = \frac{m^2}{n^2}$, то $\frac{a_m}{a_n} = \frac{2m-1}{2n-1}$; 4) $S_{3n} = 3(S_{2n} - S_n)$.

777. Пусть S_n — сумма n первых членов геометрической прогрессии. Доказать, что:

1) $S_{n+k} - S_n = q^n S_k$; 2) $S_n(S_{3n} - S_{2n}) = (S_{2n} - S_n)^2$.

778. Найти сумму $S_n = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + (n+1)x^n$.

779. Найти сумму $6 + 66 + 666 + \ldots + 666\ldots6$, где последнее слагаемое есть n-значное число.

780. Последовательность определяется рекуррентной формулой $x_n = ax_{n-1} + b$, где a, b, x_1 — заданные числа. Найти формулу n-го члена x_n и формулу суммы n первых членов S_n.

781. Последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ удовлетворяет при всяком $n > 1$ условию $x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} = 1$. Выразить x_n через x_1, x_2 и n.

782. Пусть $a_1 = a_2 = a_3 = 1$, $a_4 = -1$ и $a_n = a_{n-4} \cdot a_{n-3}$ при $n > 4$. Найти a_{2000}.

783. Последовательность определяется при $n > 2$ рекуррентной формулой $x_n = (\alpha + \beta)x_{n-1} - \alpha\beta x_{n-2}$, где α, β, x_1, x_2 — заданные числа, такие, что $\alpha\beta \neq 0$, $\alpha \neq \beta$. Найти формулу n-го члена x_n.

784. Катер затрачивает на путь от A до B по течению реки a часов, а на обратный путь b часов. Сколько часов будет плыть плот от A до B?

785. Из пункта A в пункт B вышел пешеход. Вслед за ним через 2 ч из пункта A выехал велосипедист, а ещё через 30 мин — мотоциклист. В некоторое время все трое оказались на одинаковом расстоянии от пункта A. Пешеход прибыл в пункт B на 1 ч позже мотоциклиста. На сколько минут раньше пешехода прибыл в B велосипедист?

786. Сплав меди и цинка содержал меди на 640 г больше, чем цинка. После того как из сплава выделили $\frac{6}{7}$ содержащейся в нём меди и 60% цинка, масса сплава оказалась равной 200 г. Сколько весил сплав первоначально?

787. Из пункта A вышел пешеход, а из пункта B навстречу ему одновременно выехал велосипедист. После их встречи пешеход продолжал идти в B, а велосипедист повернул назад и поехал в B. Известно, что пешеход пришёл в B на 2 ч позже велосипедиста, а скорость его в 3 раза меньше скорости велосипедиста. Сколько времени прошло от начала движения до встречи пешехода и велосипедиста?

788. Пловец плывёт против течения реки и встречает плывущую по течению реки пустую лодку. Продолжая плыть против течения ещё t минут после момента встречи, он затем поворачивает назад и догоняет лодку в s метрах от места встречи. Найти скорость течения реки.

789. Дорога из пункта A в пункт B длиной 11,5 км идёт сначала в гору, затем по равнине и, наконец, под гору. Пешеход на путь от A до B и обратно от B до A затратил 6 ч. Скорость его ходьбы в гору была 3 км/ч, на равнине — 4 км/ч, а под гору — 5 км/ч. Сколько километров составляет та часть дороги, которая идёт по равнине?

790. Два пешехода вышли одновременно из пункта A. Первый из них встретился с туристом, идущим в пункт A, через 20 мин после выхода из A, а второй встретил туриста на 5 мин позже, чем первый. Через 10 мин после второй встречи турист пришёл в A. Скорости пешеходов и туриста были постоянными. Найти отношение скоростей пешеходов.

791. Два пешехода вышли одновременно навстречу друг другу: первый — из пункта A, второй — из пункта B. До встречи первый пешеход прошёл на 1 км больше, чем второй. Через 45 мин после встречи первый пешеход пришёл в пункт B. Второй пешеход прибыл в пункт A через 1 ч 20 мин после встречи. Найти расстояние от A до B.

792. Дорога из пункта A до пункта B идёт на подъём, а от пункта B до пункта C имеет спуск. Пешеход затрачивает t часов на путь от A до C и $\frac{t}{2}$ часов на обратный путь. Найти скорость пешехода на подъёме, если его скорость на спуске на a километров в час больше, чем на подъёме, а расстояние от A до C равно s километрам.

793. Из пункта A выехали три велосипедиста, первый — на 1 ч раньше двух других, стартовавших одновременно. Скорость каждого велосипедиста постоянна. Через некоторое время третий велосипедист догнал первого, а второй догнал первого на 2 ч позже, чем третий. Определить отношение скоростей первого и третьего велосипедистов, если отношение скорости второго к скорости третьего равно $\frac{2}{3}$.

794. В колбе имеется раствор поваренной соли. Из колбы в пробирку отливают пятую часть раствора и выпаривают до тех пор, пока процентное содержание соли в пробирке не повысится вдвое. Затем выпаренный раствор выливают обратно в колбу. В результате содержание соли в колбе повышается на 3%. Определить исходное процентное содержание соли.

795. Бригада лесорубов должна была по плану заготовить за несколько дней 216 м^3 древесины. Первые три дня бригада выполняла ежедневно установленную планом норму, а затем каждый день заготавливала 8 м^3 сверх плана. Поэтому за день до срока было заготовлено 232 м^3 древесины. Найти установленную планом ежедневную норму.

796. По расписанию поезд должен пройти перегон в 120 км с одной и той же скоростью. Однако, пройдя половину перегона с этой скоростью, поезд вынужден был остановиться на 5 мин. Чтобы вовремя прибыть в конечный пункт перегона, машинисту на второй половине перегона пришлось увеличить скорость поезда на 10 км/ч. Определить скорость поезда по расписанию.

797. Катер по реке и автобус по дороге, идущей вдоль берега реки, отправляются одновременно из пункта A в пункт B и совершают безостановочное движение между A и B. Первая встреча их произошла, когда автобус прошёл $\frac{5}{9}$ всего расстояния от A до B, а вторая встреча — когда автобус после первого захода в B проехал $\frac{1}{6}$ всего расстояния от B до A. Первый раз в пункт B автобус прибыл на 16 мин позже катера. Через сколько часов после начала движения автобус и катер первый раз окажутся одновременно в пункте A?

798. Из пункта A по шоссе в одном направлении одновременно выехали два автомобиля, а спустя некоторое время из того же пункта вслед за ними выехал третий автомобиль. Через час третий автомобиль был в 3 раза ближе к первому автомобилю, чем ко второму, а ещё через треть часа — на равном расстоянии от них. Определить, через какое время вслед за первыми двумя автомобилями выехал третий, если он догнал первый автомобиль через $\frac{7}{4}$ ч после старта первых двух автомобилей.

799. Дорога проходит через пункты A и B. Велосипедист выехал из A по направлению к B. Одновременно с ним из пункта B вышли с равными скоростями два пешехода: первый — в пункт A, второй — в противоположном направлении. Велосипедист проехал путь от A до B за 0,5 ч и, продолжая движение, догнал второго пешехода. Это произошло через 1,2 ч после встречи велосипедиста с первым пешеходом. Определить время движения велосипедиста от начала движения до встречи с первым пешеходом.

800. Дорога проходит через пункты A и B. Одновременно и в одном направлении выехали: из A — мотоциклист (в направлении к B), из B — велосипедист. Мотоциклист догнал велосипедиста на расстоянии a километров от B. Если бы мотоциклист и велосипедист выехали одновременно из A в B, то в момент прибытия мотоциклиста в B велосипедист отставал бы от него на b километров. Определить расстояние между пунктами A и B.

801. Автобус из пункта A и автомобиль из пункта B отправляются одновременно и осуществляют безостановочное движение с постоянными скоростями между A и B. Первая встреча их произошла через 42 мин после начала движения, а через 2 ч 34 мин после начала движения автомобиль первый раз обогнал автобус. Через какое время после начала движения автобус и автомобиль первый раз окажутся одновременно в пункте A?

802. Вдоль реки расположены пункты A, B, C (B между A и C). Буксир прошёл путь от A до C за 4 ч. На каждом из участков AB и BC собственная скорость буксира (скорость относительно воды) была постоянна, причём на участке BC в $1\frac{2}{3}$ раза больше, чем на участке AB. Обратный путь от C до A буксир прошёл также за 4 ч, и на всём пути его собственная скорость была в 2 раза больше, чем при движении из A в B. Если бы на обратном пути собственная скорость буксира была такой же, как и при движении из B в C, то участок от C до B он прошёл бы за 3 ч. Сколько времени буксир шёл от A до B?

Краткие теоретические сведения по курсу алгебры VII — IX классов

ЧИСЛА И ЧИСЛОВЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

1. Число.

Множество *натуральных* чисел: 1; 2; 3; ... .
Множество *целых* чисел: 0; ±1; ±2; ±3; ... .

Множество *рациональных* чисел — числа вида $\frac{m}{n}$, где m — целое, n — натуральное число. Например, рациональными являются числа $\frac{3}{5}$; $\frac{2}{1} = 2$; $-\frac{2}{7}$.

Рациональное число можно представить в виде конечной десятичной дроби или бесконечной периодической десятичной дроби. Например, $\frac{2}{5} = 0{,}4$; $-\frac{1}{3} = -0{,}333... = -0{,}(3)$.

Множество *иррациональных* чисел — бесконечные непериодические десятичные дроби. Например, 0,1001000100001... — иррациональное число.

Иррациональными числами являются числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π и др.

Множество *действительных* чисел — все рациональные и иррациональные числа.

2. Числовые промежутки — отрезки, лучи, интервалы и полуинтервалы.

Отрезок $[a; b]$ — множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant x \leqslant b$, где $a < b$. Например, отрезок $[2; 5]$ — это множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $2 \leqslant x \leqslant 5$.

Луч — это множество чисел x, удовлетворяющих неравенству вида $x \geqslant a$ или вида $x \leqslant a$.

Интервал $(a; b)$ — множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a < x < b$, где $a < b$. Например, интервал $(-2; 3)$ — это множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $-2 < x < 3$.

Полуинтервал $[a; b)$ — множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant x < b$; полуинтервал $(a; b]$ — множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a < x \leqslant b$, где $a < b$. Например, $[3; 8)$ — множество чисел x, таких, что $3 \leqslant x < 8$; $(-4; 2]$ — множество чисел x, таких, что $-4 < x \leqslant 2$.

Множества чисел, удовлетворяющих неравенствам $x>a$, $x<a$, $x\geqslant a$, $x\leqslant a$, можно записывать как $(a;+\infty)$, $(-\infty;a)$; $[a;+\infty)$, $(-\infty;a]$ соответственно. Промежутки вида $x<a$ и $x>a$ часто называют *интервалами*.

3. **Модуль числа** a (обозначается $|a|$) определяется формулой

$$|a|=\begin{cases} a, & \text{если } a\geqslant 0,\\ -a, & \text{если } a<0.\end{cases}$$

Геометрически $|a|$ — расстояние от точки 0 до точки, изображающей число a; $|a-b|$ — расстояние между точками a и b.

Для любого числа a выполняется неравенство $|a|\geqslant 0$, причём $|a|=0$ только при $a=0$.

Неравенству $|x|\leqslant a$, где $a>0$, удовлетворяют все числа x из отрезка $[-a;a]$, т. е. такие числа x, что $-a\leqslant x\leqslant a$.

Неравенству $|x|<a$, где $a>0$, удовлетворяют все числа x из интервала $(-a;a)$, т. е. такие числа x, что $-a<x<a$.

Неравенству $|x|\geqslant a$, где $a>0$, удовлетворяют все числа $x\leqslant -a$ и все числа $x\geqslant a$.

Неравенству $|x|>a$, где $a>0$, удовлетворяют все числа $x<-a$ и все числа $x>a$.

4. **Числовое выражение** образуется из чисел с помощью знаков действий и скобок.

Например, $1{,}2\cdot(-3)-9:(0{,}5+1{,}5)$ — числовое выражение.

Значение числового выражения — число, полученное в результате выполнения действий, указанных в этом выражении. Например, число $-21{,}6$ — значение выражения $1{,}2\cdot(-3)-9:0{,}5$.

5. **Порядок выполнения действий.**

Действия первой ступени — сложение и вычитание.

Действия второй ступени — умножение и деление.

Действие третьей ступени — возведение в степень.

1) Если выражение не содержит скобок, то сначала выполняют действия третьей ступени, затем действия второй ступени и, наконец, действия первой ступени; при этом действия одной и той же ступени выполняются в том порядке, в котором они записаны.

2) Если выражение содержит скобки, то сначала выполняют все действия над числами, заключенными в скобках, а затем все остальные действия; при этом выполнение действий над числами в скобках и вне скобок производится в порядке, указанном в п. 1.

3) Если вычисляется значение дробного выражения, то выполняются действия в числителе дроби и в знаменателе, затем первый результат делится на второй.

4) Если выражение содержит скобки, заключенные внутри других скобок, то сначала выполняют действия во внутренних скобках.

6. **Стандартный вид числа** — запись числа в виде $a \cdot 10^n$, где $1 \leqslant |a| < 10$, n — целое, которое называют порядком числа. Например, $345{,}4 = 3{,}454 \cdot 10^2$, $0{,}003 = 3 \cdot 10^{-3}$, $-0{,}12 = -1{,}2 \cdot 10^{-1}$.

7. **Погрешность приближения.**

Абсолютная погрешность приближения — модуль разности между точным значением величины и её приближённым значением. Если a — приближённое значение, а x — точное, то абсолютная погрешность равна $|x - a|$.

Запись $x = a \pm h$ означает, что абсолютная погрешность приближения не превосходит h, т. е. $|x - a| \leqslant h$, или $a - h \leqslant x \leqslant a + h$. При этом говорят, что x равно a с точностью до h. Например, запись $\pi = 3{,}14 \pm 0{,}01$ означает, что $|\pi - 3{,}14| \leqslant 0{,}01$, т. е. число π равно 3,14 с точностью до 0,01.

При округлении числа с недостатком с точностью до 10^{-n} сохраняются n первых знаков после запятой, а последующие отбрасываются. Например, при округлении числа 17,2397 с недостатком до тысячных, т. е. до 10^{-3}, получаем 17,239, до сотых — 17,23, до десятых — 17,2.

При округлении числа с избытком с точностью до 10^{-n} n-й знак после запятой увеличивается на единицу, а все последующие отбрасываются.

Например, при округлении числа 2,5143 с избытком до тысячных получаем 2,515, до сотых — 2,52, до десятых — 2,6. Погрешность округления в обоих случаях не превосходит 10^{-n}.

Округление с наименьшей погрешностью: если первая отбрасываемая цифра данного числа меньше 5, то округляют с недостатком, а если эта цифра больше или равна 5, то округляют с избытком. Например, при округлении числа 8,351 до сотых получаем 8,35, а при округлении до десятых — 8,4.

Запись $x \approx a$ означает, что число a является приближённым значением числа x. Например, $\sqrt{2} \approx 1{,}41$.

Относительная погрешность — частное от деления абсолютной погрешности на модуль приближённого значения величины. Если x — точное значение, a — приближённое, то относительная погрешность равна $\frac{|x - a|}{|a|}$. Относительную погрешность обычно выражают в процентах. Например, если точное значение величины равно 1,95, а приближённое равно 2, то относительная погрешность приближения равна

$$\frac{|2 - 1{,}95|}{2} = \frac{0{,}05}{2} = 0{,}025, \text{ или } 2{,}5\%.$$

8. **Алгебраическое выражение** образуется из чисел и букв с помощью знаков действий и скобок.

Примеры алгебраических выражений:

$$2(m+n);\ 3a+2ab-1;\ (a-b)^2;\ \frac{2x+y}{z}.$$

Значение алгебраического выражения — число, полученное в результате вычислений после замены в этом выражении букв числами. Например, числовое значение выражения $3a+2ab-1$ при $a=2$ и $b=3$ равно $3\cdot2+2\cdot2\cdot3-1=17$.

9. **Алгебраическая сумма** — запись, состоящая из нескольких алгебраических выражений, соединенных знаками «+» или «−».

Правила раскрытия скобок.

1) Если к алгебраическому выражению прибавляется алгебраическая сумма, заключенная в скобки, то скобки и знак «+» перед скобками можно опустить, сохранив знак каждого слагаемого этой алгебраической суммы, например:

$$14+(7-23+21)=14+7-23+21.$$
$$a+(b-c-d)=a+b-c-d.$$

2) Если из алгебраического выражения вычитается алгебраическая сумма, заключенная в скобки, то скобки и знак «−» перед скобками можно опустить, изменив знак каждого слагаемого этой алгебраической суммы на противоположный, например:

$$14-(7-23+21)=14-7+23-21.$$
$$a-(b-c-d)=a-b+c+d.$$

10. **Одночлен** — алгебраическое выражение, представляющее собой произведение числовых и буквенных множителей.

Примеры одночленов: $3ab$, $-2a4b^2c^3$, 7, a, $0{,}6xy^5y^2$, $-t^4$. Например, числовыми множителями одночлена

$$3a^2\,(0{,}4)\cdot b\,(-5)\,c^3$$

являются 3; 0,4; −5, а буквенными — a^2, b, c^3.

Одночлен стандартного вида — одночлен, который содержит только один числовой множитель, стоящий на первом месте, и степени с различными буквенными основаниями.

Чтобы записать одночлен в стандартном виде, нужно перемножить все его числовые множители и поставить их произведение на первое место, затем произведения степеней с одинаковыми основаниями записать в виде степеней.

Коэффициент одночлена — числовой множитель одночлена, записанного в стандартном виде.

Например, коэффициент одночлена $\frac{3}{4}abc^2$ равен $\frac{3}{4}$, коэффициент одночлена $-7a^3b$ равен -7, коэффициент одночлена a^2bc равен 1, коэффициент одночлена $-ab^2$ равен -1.

11. **Многочлен** — алгебраическая сумма нескольких одночленов. Примеры многочленов: $4ab^2c^3$ — одночлен, $2ab - 3bc$ — двучлен, $4ab + 3ac - bc$ — трёхчлен.

Члены многочлена — одночлены, из которых состоит многочлен. Например, членами многочлена $2ab^2 - 3a^2c + 7bc - 4bc$ являются одночлены $2ab^2$, $-3a^2c$, $7bc$, $-4bc$.

Подобные члены — одночлены, отличающиеся после приведения к стандартному виду только коэффициентами, или одинаковые одночлены.

Приведение подобных членов — упрощение многочлена, при котором алгебраическая сумма подобных одночленов заменяется одним одночленом, например:

$$2ab - 4bc + ac + 3ab + bc + 10 = 5ab - 3bc + ac + 10.$$

Стандартный вид многочлена — запись многочлена, в которой все члены записаны в стандартном виде и среди них нет подобных.

Действия над одночленами и многочленами:

1) Чтобы записать алгебраическую сумму нескольких многочленов в виде многочлена стандартного вида, нужно раскрыть скобки и привести подобные члены, например:

$$(2a^2b - 3bc) + (a^2b + 5bc) - (3a^2b - bc) =$$
$$= 2a^2b - 3bc + a^2b + 5bc - 3a^2b + bc = 3bc.$$

2) Чтобы умножить многочлен на одночлен, нужно каждый член многочлена умножить на этот одночлен и полученные произведения сложить, например:

$$(2ab - 3bc)(4ac) = (2ab)(4ac) + (-3bc)(4ac) =$$
$$= 8a^2bc - 12abc^2.$$

3) Чтобы умножить многочлен на многочлен, нужно умножить каждый член одного многочлена на каждый член другого многочлена и полученные произведения сложить, например:

$$(5a - 2b)(3a + 4b) = (5a)(3a) + (5a)(4b) + (-2b)(3a) + (-2b)(4b) =$$
$$= 15a^2 + 14ab - 8b^2.$$

4) Чтобы разделить многочлен на одночлен, нужно каждый член многочлена разделить на этот одночлен и полученные результаты сложить, например:

$$(4a^3b^2 - 12a^2b^3) : (2ab) = (4a^3b^2) : (2ab) + (-12a^2b^3) : (2ab) =$$
$$= 2a^2b - 6ab^2.$$

12. Формулы сокращённого умножения.

1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
2) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;
3) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;
4) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$;
5) $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$;
6) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$;
7) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

13. Разложение многочлена на множители — представление многочлена в виде произведения двух или нескольких многочленов, например:

$$4x^2 - 9y^2 = (2x+3y)(2x-3y).$$

При разложении многочлена на множители используются следующие способы:

1) *Вынесение общего множителя за скобки*, например:

$$3ax + 6ay = 3a(x+2y).$$

2) *Способ группировки*, например:

$$a^3 - 2a^2 + 2a - 4 = (a^3 - 2a^2) + (2a - 4) = a^2(a-2) + 2(a-2) =$$
$$= (a-2)(a^2+2).$$

3) *Применение формул сокращённого умножения*, например:

$$9x^2 - \frac{1}{16}y^2 = \left(3x + \frac{1}{4}y\right)\left(3x - \frac{1}{4}y\right);$$

$$27x^3 + 8y^6 = (3x+2y^2)(9x^2 - 6xy^2 + 4y^4); \quad z^2 - 14z + 49 = (z-7)^2.$$

Разложение квадратного трёхчлена ax^2+bx+c *на множители* — представление его в виде $a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1, x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$. Например:

$$2x^2 + 3x - 2 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+2).$$

14. Алгебраическая дробь — дробь, числитель и знаменатель которой многочлены. Примеры алгебраических дробей:

$$\frac{a^2+b}{c}, \quad \frac{3x-2y}{a+1}.$$

Предполагается, что буквы, употребляемые в записи алгебраической дроби, могут принимать только такие значения, при которых знаменатель этой дроби не равен нулю.

Основное свойство дроби: при умножении числителя и знаменателя дроби на одно и то же алгебраическое выражение получается равная ей дробь. Например:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{(a-b)(a-b)}{(a+b)(a-b)} = \frac{(a-b)^2}{a^2-b^2}.$$

Используя основное свойство дроби, можно сокращать алгебраическую дробь на общий множитель числителя и знаменателя. Например:

$$\frac{x^2-1}{x^3-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{x+1}{x^2+x+1}.$$

Сложение и вычитание алгебраических дробей проводятся по тем же правилам, которые применяются для числовых дробей.

Для нахождения алгебраической суммы двух или нескольких дробей эти дроби приводят к общему знаменателю и используют правило сложения дробей с одинаковыми знаменателями.

Например, общий знаменатель дробей $\frac{1}{a^2b}$ и $\frac{1}{ab^2}$ равен a^2b^2, поэтому

$$\frac{1}{a^2b}+\frac{1}{ab^2}=\frac{b}{a^2b^2}+\frac{a}{a^2b^2}=\frac{b+a}{a^2b^2}.$$

Умножение и деление алгебраических дробей проводятся по тем же правилам, которые применяются для числовых дробей, например:

$$\frac{2a}{3b}\cdot\frac{b^2}{4a}=\frac{2ab^2}{3b\cdot 4a}=\frac{1}{6}b,$$

$$\frac{x^2-y^2}{2xy}:\frac{x+y}{4x}=\frac{(x^2-y^2)\cdot 4x}{2xy(x+y)}=\frac{2(x-y)}{y}.$$

15. **Тождество** — равенство, справедливое при любых допустимых значениях входящих в него букв. Например, тождествами являются равенства:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b),\quad \sqrt{a^2}=|a|,$$

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\quad \frac{a^2-1}{a-1}=a+1.$$

ПРОГРЕССИИ

16. **Арифметическая прогрессия** — числовая последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, удовлетворяющая условию $a_{n+1}=a_n+d$, где n — любое натуральное число, а d — заданное число, называемое *разностью* этой прогрессии.

Например, последовательность $1, 5, 9, \ldots, 4n-3, \ldots$ является арифметической прогрессией с разностью $d=4$.

Формула n-го члена арифметической прогрессии:

$$a_n=a_1+(n-1)d.$$

Формула суммы n первых членов арифметической прогрессии:

$$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n.$$

17. Геометрическая прогрессия — числовая последовательность b_1, b_2, ..., b_n, ..., удовлетворяющая условию $b_{n+1} = b_n q$, где n — любое натуральное число, а q — заданное число, называемое знаменателем этой прогрессии, причём $b_1 \neq 0$, $q \neq 0$.

Например, последовательность 3, $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{5^2}$, ..., $\frac{3}{5^{n-1}}$, ... является геометрической прогрессией со знаменателем $q = \frac{1}{5}$.

Формула n-го члена геометрической прогрессии:

$$b_n = b_1 q^{n-1}.$$

Формула суммы n первых членов геометрической прогрессии:

$$S = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}, \quad q \neq 1.$$

Формула сложных процентов: $b = b_1\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$.

СТЕПЕНИ И КОРНИ

18. Степень числа a с натуральным показателем n, большим 1, — произведение n множителей, равных a, т. е.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}.$$

Например, $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$, $m^5 = \underbrace{m \cdot m \cdot m \cdot m \cdot m}_{5 \text{ раз}}$.

В записи *степени* a^n число a — *основание степени*, n — *показатель степени*. Например, в записи степени 2^3 число 2 — основание степени, число 3 — показатель степени.

Первая степень числа — само число: $a^1 = a$. Например, $3^1 = 3$, $\left(\frac{1}{13}\right)^1 = \frac{1}{13}$.

Действие возведения в степень — нахождение степени числа.

Основные свойства степени:

1) При умножении степеней с равными основаниями основание остаётся прежним, а показатели степеней складываются:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

2) При делении степеней с равными основаниями основание остаётся прежним, а показатели степеней вычитаются:

$$a^n : a^m = a^{n-m}.$$

3) При возведении степени в степень основание остаётся прежним, а показатели степеней перемножаются:

$$(a^n)^m = a^{nm}.$$

4) При возведении произведения в степень в эту степень возводится каждый множитель:

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

5) При возведении в степень дроби в эту степень возводятся числитель и знаменатель:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

19. **Квадратный корень** из числа a — такое число, квадрат которого равен a. Например, 6 — квадратный корень из числа 36; число -6 также квадратный корень из числа 36.

Извлечение квадратного корня — действие нахождения квадратного корня. Извлечь квадратный корень можно только из неотрицательного числа.

Арифметический квадратный корень из числа a — неотрицательное число, квадрат которого равен a. Это число обозначается так: $\sqrt{a}$. Например, $\sqrt{16} = 4$, $\sqrt{144} = 12$.

Выражение $\sqrt{a}$ имеет смысл только для $a \geqslant 0$, при этом

$$\sqrt{a} \geqslant 0, \ (\sqrt{a})^2 = a.$$

Свойства квадратных корней:

1) $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$. Например, $\sqrt{144 \cdot 196} = \sqrt{144} \cdot \sqrt{196} = 12 \cdot 14 = 168$.

2) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, если $a \geqslant 0$, $b > 0$. Например, $\sqrt{\frac{169}{225}} = \frac{\sqrt{169}}{\sqrt{225}} = \frac{13}{15}$.

3) $\sqrt{a^{2n}} = |a^n|$, где n — натуральное число. Например, $\sqrt{3^6} = 3^3 = 27$, $\sqrt{(-2)^{10}} = |-2|^5 = 32$.

Эти свойства используются при преобразовании выражений, содержащих квадратные корни. Основные из этих преобразований — *вынесение множителя из-под знака корня:*

$$\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}, \text{ если } a \geqslant 0, \ b \geqslant 0,$$

и *внесение множителя под знак корня:*

$$a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}, \text{ если } a \geqslant 0, \ b \geqslant 0.$$

20. Степень с рациональным показателем.

Степень с целым отрицательным показателем определяется равенством $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, где $a \neq 0$, n — натуральное число.

Например, $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$.

Степень с нулевым показателем определяется равенством $a^0 = 1$, где $a \neq 0$. Например, $4^0 = 1$, $(-0{,}2)^0 = 1$.

Корень натуральной степени из числа a — это число, n-я степень которого равна a. Например, числа 2 и (-2) — корни четвёртой степени из 16, число (-3) — корень третьей степени (корень кубический) из числа -27.

Арифметический корень n-й степени из неотрицательного числа a (обозначается $\sqrt[n]{a}$, $n \geqslant 2$) — неотрицательное число, n-я степень которого равна a. Например, $\sqrt[4]{16} = 2$, $\sqrt[3]{27} = 3$.

УРАВНЕНИЯ

21. Уравнение с одним неизвестным — равенство, содержащее неизвестное число, обозначенное буквой.

Пример уравнения: $2x + 3 = 3x + 2$, где x — неизвестное число, которое нужно найти.

Корень уравнения — значение неизвестного, при котором уравнение обращается в верное равенство.

Например, число 3 является корнем уравнения $x + 1 = 7 - x$, так как $3 + 1 = 7 - 3$.

Решить уравнение — это значит найти все его корни или установить, что их нет.

Основные свойства уравнений:

1) Любой член уравнения можно перенести из одной части в другую, изменив его знак на противоположный.

2) Обе части уравнения можно умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю.

22. Квадратное уравнение — уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b и c — заданные числа, $a \neq 0$, x — неизвестное число.

Коэффициенты квадратного уравнения называют так: a — первый или старший коэффициент, b — второй коэффициент, c — свободный член.

Примеры квадратных уравнений:

$$2x^2 - x - 1 = 0,\ \ 3x^2 + 7x = 0.$$

Неполное квадратное уравнение — квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

у которого хотя бы один из коэффициентов b или c равен нулю.

Примеры неполных квадратных уравнений:

$$x^2 = 0, \ \ 5x^2 + 4 = 0, \ \ 8x^2 + x = 0.$$

Формула корней квадратного уравнения:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \text{ где } D = b^2 - 4ac \text{ — дискриминант.}$$

Например, уравнение $3x^2 + 5x - 2 = 0$ имеет два корня:

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6} = \frac{-5 \pm 7}{6}, \text{ т. е. } x_1 = \frac{1}{3}, \ x_2 = -2.$$

Приведённое квадратное уравнение — уравнение вида

$$x^2 + px + q = 0.$$

Формула корней приведённого квадратного уравнения:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Например, корни уравнения $x^2 - 6x - 7 = 0$ таковы:

$$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 + 7} = 3 \pm 4, \ x_1 = 7, \ x_2 = -1.$$

Теорема Виета. Сумма корней приведённого квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, и их произведение равно свободному члену.

Таким образом, если x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$, то $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$.

Теорема, обратная теореме Виета. Если числа p, q, x_1, x_2 таковы, что $x_1 + x_2 = -p$, $x_1x_2 = q$, то x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$.

23. **Система двух уравнений с двумя неизвестными** x **и** y — два уравнения с неизвестными x и y, рассматриваемые совместно.

Примеры систем уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} 3x - y = 5, \\ 2x + y = 7; \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 2y = 7, \\ x^2 - 4y^2 = -35. \end{cases}$$

Решение системы — пара чисел x, y, которые при подстановке в эту систему обращают каждое её уравнение в верное равенство.

Решить систему — это значит найти все её решения или установить, что их нет.

При решении систем линейных уравнений с двумя неизвестными применяются следующие *способы*:

1) *Способ подстановки.* Из какого-нибудь уравнения одно из неизвестных выражают через другое и подставляют в другое уравнение системы.
2) *Способ алгебраического сложения.* Сравняв модули коэффициентов при одном из неизвестных системы

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$$

почленным сложением или вычитанием уравнений системы исключают это неизвестное.
3) *Графический способ.* В одной системе координат строят графики уравнений системы; по взаимному расположению графиков определяют число решений системы; находят координаты общих точек графиков (если они есть).

НЕРАВЕНСТВА

24. Числовые неравенства.

Неравенство $a > b$ означает, что разность $a - b$ положительна.

Неравенство $a < b$ означает, что разность $a - b$ отрицательна.

Если $a > b$, то $b < a$.

Неравенство — два числовых или алгебраических выражения, соединенные знаком > или <.

Примеры неравенств: $4 > 7 - 5$; $2a + b < a^2 + b^2$.

Для любых двух чисел a и b только одно из следующих трёх соотношений является верным: $a > b$, $a = b$, $a < b$.

Основные свойства числовых неравенств:

1) Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.
2) Если прибавить к обеим частям неравенства или вычесть из них одно и то же число, то знак неравенства не изменится: если $a > b$, то $a + c > b + c$ и $a - c > b - c$ для любого числа c.

Любое число можно перенести из одной части неравенства в другую, изменив знак переносимого числа на противоположный.

3) Обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю, тогда, если это число положительно, знак неравенства не меняется, а если это число отрицательно, то знак неравенства меняется на противоположный: если $a > b$, то

$$ac > bc \text{ и } \frac{a}{c} > \frac{b}{c} \text{ при } c > 0, \quad ac < bc \text{ и } \frac{a}{c} < \frac{b}{c} \text{ при } c < 0.$$

Сложение неравенств. Неравенства одинакового знака можно складывать, при этом получается неравенство того же знака: если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$.

Например:

$$\begin{array}{r} 4 > 3{,}5 \\ + \; -2 > -5 \\ \hline 2 > -1{,}5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2{,}3 < 3{,}5 \\ + \; -4 < -3 \\ \hline -1{,}7 < 0{,}5 \end{array}$$

Умножение неравенств. Неравенства одинакового знака, у которых левые и правые части положительны, можно перемножать, при этом получается неравенство того же знака: если $a > b$, $c > d$ и a, b, c, d — положительные числа, то $ac > bd$.

Например:

$$\begin{array}{r} 2{,}4 > 2{,}1 \\ \times \; 4 > 3 \\ \hline 9{,}6 > 6{,}3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1{,}7 < 2{,}3 \\ \times \; 2 < 3 \\ \hline 3{,}4 < 6{,}9 \end{array}$$

Если $a > b$ и a, b — положительные числа, то $a^2 > b^2$, $a^3 > b^3$ и вообще при любом натуральном n выполняется неравенство $a^n > b^n$.

Например, $6^2 > 5^2$, $6^3 > 5^3$, $6^{12} > 5^{12}$.

Строгие неравенства — неравенства со знаками $>$ (больше) и $<$ (меньше).

Например, $5 > 3$, $x < 1$.

Нестрогие неравенства — неравенства со знаками $\geqslant$ (больше или равно) и $\leqslant$ (меньше или равно).

Например, $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$, $x \leqslant 3$.

Нестрогое неравенство $a \geqslant b$ означает, что $a > b$ или $a = b$.

Свойства нестрогих неравенств такие же, как и свойства строгих неравенств. При этом в свойствах строгих неравенств противоположными считаются знаки $>$ и $<$, а в свойствах нестрогих неравенств — знаки $\geqslant$ и $\leqslant$.

Среднее арифметическое двух чисел a и b — число $\frac{a+b}{2}$.

Среднее геометрическое двух положительных чисел a и b — число $\sqrt{ab}$.

Если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, то $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$.

25. Неравенство с одним неизвестным — это неравенство, держащее неизвестное число, обозначенное буквой.

Примеры неравенств первой степени с одним неизвестным:

$$3x + 4 < 5x - 2; \quad \frac{1}{3}x - 1 \geqslant \frac{3-x}{4}.$$

Решение неравенства с одним неизвестным — значение неизвестного, при котором данное неравенство обращается в верное числовое неравенство.

Например, число 3 является решением неравенства $x+1>2-x$, так как $3+1>2-3$.

Решить неравенство — это значит найти все его решения или установить, что их нет.

Основные свойства неравенств с одним неизвестным:

1) Любой член неравенства можно перенести из одной части неравенства в другую, изменив его знак на противоположный, при этом знак неравенства не меняется.

2) Обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю; если это число положительно, то знак неравенства не меняется, а если это число отрицательно, то знак неравенства меняется на противоположный.

Система неравенств с одним неизвестным — это несколько неравенств, содержащих одно и то же неизвестное число и рассматриваемых совместно.

Примеры систем неравенств с одним неизвестным:

$$\begin{cases} 2(x-1)>3, \\ 3x+4>1-x; \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2\leqslant 5x, \\ 3(x-1)>4, \\ x-4\leqslant 7. \end{cases}$$

Решение системы неравенств — то значение неизвестного, при котором все неравенства системы обращаются в верные числовые неравенства.

Например, число 2 является решением системы $\begin{cases} 3x-4<2x, \\ x+2>3, \end{cases}$ так как $3\cdot 2-4<2\cdot 2$ и $2+2>3$.

Вообще решениями этой системы являются все числа x, такие, что $1<x<4$; других решений нет.

Решить систему неравенств — это значит найти все её решения или установить, что их нет.

26. **Квадратное неравенство** — неравенство, в левой части которого стоит квадратный трёхчлен, а в правой — нуль.

Примеры квадратных неравенств:

$$x^2-x+2>0,\ \ 2x^2-3x-4\leqslant 0,\ \ x^2-4>0.$$

Для решения квадратного неравенства нужно:

1) определить направление ветвей параболы по знаку первого коэффициента квадратичной функции;

2) найти корни соответствующего квадратного уравнения (если они есть);

3) построить эскиз графика и по нему определить промежутки, на которых квадратичная функция принимает положительные или отрицательные значения.

Например, решая неравенство $2x^2 + 3x - 2 < 0$, имеем:

1) ветви параболы направлены вверх, так как $2 > 0$;

2) корни уравнения $2x^2 + 3x - 2 = 0$ таковы: $x_1 = 0{,}5$, $x_2 = -2$;

3) по эскизу графика функции $y = 2x^2 + 3x - 2$ устанавливаем, что $y < 0$ при $-2 < x < 0{,}5$.

27. **Метод интервалов** используется для решения неравенств. Рассмотрим, например, неравенство $(x-1)(x-2)(x-3) < 0$. Числа 1, 2 и 3 разбивают числовую ось на 4 интервала: $x < 1$, $1 < x < 2$, $2 < x < 3$, $x > 3$. На каждом из интервалов левая часть неравенства сохраняет знак, и при переходе к соседнему интервалу знак левой части меняется на противоположный. Так как при $x > 3$ левая часть неравенства положительна, то решениями данного неравенства являются значения x из интервалов $x < 1$ и $2 < x < 3$.

ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ

28. **Функция.** Если каждому значению x из некоторого множества чисел поставлено в соответствие число y, то говорят, что на этом множестве задана функция $y(x)$. При этом x называют *независимой переменной* (или *аргументом*), а y — *зависимой переменной* (или *функцией*).

Область определения функции — множество всех значений, которые может принимать её аргумент. Если функция задана формулой, то считают, что её область определения — множество значений аргумента, при которых эта формула имеет смысл.

Например, функция $y = \sqrt{x-2}$ определена при $x \geqslant 2$.

Функция $y(x)$ называется *возрастающей* на промежутке, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции, т. е. для любых x_1, x_2, принадлежащих этому промежутку, из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $y(x_2) > y(x_1)$. Например, функция $y = x^3$ возрастает на всей числовой прямой; функция $y = x^2$ возрастает на промежутке $[0; +\infty)$.

Функция $y(x)$ называется *убывающей* на промежутке, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции, т. е. для любых x_1, x_2, принадлежащих этому промежутку, из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $y(x_2) < y(x_1)$. Например, функция $y = -2x$ убывает на всей числовой прямой; функция $y = x^2$ убывает на промежутке $(-\infty; 0]$, функция $y = \dfrac{1}{x}$ убывает на промежутках $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.

График функции $y(x)$ — множество всех точек координатной плоскости с координатами $(x; y(x))$.

Пусть область определения функции $y(x)$ симметрична относительно начала координат. Тогда функция $y(x)$ называется чётной, если выполняется равенство $y(-x) = y(x)$, и нечётной, если $y(-x) = -y(x)$. Например, $y = x^4$ — чётная функция, а $y = x^3$ — нечётная функция.

График чётной функции симметричен относительно оси ординат.

График нечётной функции симметричен относительно начала координат.

29. **Линейная функция** — функция вида $y = kx + b$, где k и b — заданные числа.

График линейной функции $y = kx + b$ — прямая. При $b = 0$ функция принимает вид $y = kx$, её график проходит через начало координат.

30. **Прямая пропорциональная зависимость** — зависимость, выражаемая формулой $y = kx$, где $k > 0$, $x > 0$.

Обратная пропорциональная зависимость — зависимость, выражаемая формулой $y = \frac{k}{x}$, где $k > 0$, $x > 0$.

31. **Функция** $y = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$ определена при $x \neq 0$, принимает все действительные значения, кроме нуля.

Если $k > 0$, то функция $y = \frac{k}{x}$ $\left(\text{например, } y = \frac{2}{x},\ y = \frac{1}{2x}\right)$:

а) принимает положительные значения при $x > 0$ и отрицательные при $x < 0$;
б) убывает на промежутках $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.

Если $k < 0$, то функция $y = \frac{k}{x}$ $\left(\text{например, } y = -\frac{1}{x},\ y = -\frac{2}{x},\ y = -\frac{1}{3x}\right)$:

а) принимает положительные значения при $x < 0$ и отрицательные при $x > 0$;
б) возрастает на промежутках $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.

График функции $y = \frac{k}{x}$ называется *гиперболой*. Она имеет две ветви, расположенные симметрично относительно начала координат. При $k > 0$ график расположен в первом и третьем квадрантах, при $k < 0$ — во втором и четвёртом квадрантах.

32. **Квадратичная функция** — функция вида $y = ax^2 + bx + c$, где a, b, c — заданные действительные числа, $a \neq 0$, x — действительная переменная.

Графиком квадратичной функции является *парабола*.

В частности, графиком функции $y = x^2$ является парабола с вершиной в точке $(0; 0)$; ось симметрии этой параболы — ось ординат.

В общем случае *вершиной параболы*

$$y = ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2 + y_0$$

является точка $(x_0; y_0)$, где $x_0 = \frac{-b}{2a}$, $y_0 = y(x_0)$.

Ось симметрии параболы — прямая, параллельная оси ординат и проходящая через вершину параболы. При $a > 0$ ветви параболы направлены вверх, при $a < 0$ — вниз.

Параболу $y = ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2 + y_0$ можно получить сдвигом параболы $y = ax^2$ вдоль координатных осей. Например, параболу $y = 3(x + 2)^2 + 4$ можно получить сдвигом параболы $y = 3x^2$ вдоль оси Ox на две единицы влево и вдоль оси Oy на четыре единицы вверх.

Схема построения графика квадратичной функции

$$y = ax^2 + bx + c:$$

1. Построить вершину параболы $(x_0; y_0)$, вычислив x_0, y_0 по формулам $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = y(x_0)$ или методом выделения полного квадрата.
2. Провести через вершину параболы прямую, параллельную оси ординат, — ось симметрии параболы.
3. Найти нули функции, если они есть, и построить на оси абсцисс соответствующие точки параболы.
4. Построить две какие-нибудь точки параболы, симметричные относительно её оси, например точки с абсциссами $x = 0$ и $x = 2x_0 = -\frac{b}{a}$ и ординатой $y = c$.
5. Провести через построенные точки параболу.

Наибольшее и наименьшее значения квадратичной функции.

Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2 + y_0$:

а) принимает наименьшее значение, равное y_0, при $x = x_0$, если $a > 0$;

б) принимает наибольшее значение, равное y_0, при $x = x_0$, если $a < 0$.

Например, квадратичная функция $y = 2(x - 1)^2 + 3$ принимает при $x = 1$ наименьшее значение, равное 3;

квадратичная функция $y = -4(x + 2)^2 - 5$ принимает при $x = -2$ наибольшее значение, равное -5.

КОМБИНАТОРИКА

Правило произведения. Если существует n вариантов выбора первого элемента и для каждого из них есть m вариантов выбора второго элемента, то всего существует $n \cdot m$ различных пар с выбранными первым и вторым элементами.

Например, с помощью трех букв a, b и c можно составить $3 \cdot 3 = 9$ различных двухбуквенных кодов, в которых буквы могут быть одинаковыми, и $3 \cdot 2 = 6$ различных двухбуквенных кодов, в которых буквы должны быть разными.

СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

Вероятность наступления события A (обозначают $P(A)$) — отношение $\frac{m}{n}$, где n — число равновозможных попарно несовместных n исходов испытания, в котором наблюдается событие A, m — число благоприятствующих наступлению события A исходов, т. е. $P(A) = \frac{m}{n}$.

Например, при одном бросании игральной кости $n = 6$ (выпало 1 очко, выпало 2 очка, ..., выпало 6 очков); событию A — выпало чётное число очков, благоприятствуют $m = 3$ исходов (выпало 2, или 4, или 6 очков), поэтому $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Относительная частота события A (обозначается $W(A)$) в данной серии испытаний — отношение числа испытаний M, в которых это событие произошло, к числу всех проведённых испытаний N.

Например, если в серии из 30 выстрелов ($N = 30$) только 24 поразили мишень ($M = 24$), то относительная частота попадания по мишени в этой серии выстрелов равна

$$W = \frac{M}{N} = \frac{24}{30} = \frac{4}{5} = 0{,}8.$$

Статистическая вероятность события — число, около которого колеблется относительная частота этого события при большом числе испытаний.

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Таблица распределения, полигон частот, диаграммы и др. — *способы наглядного представления* выборки значений случайной величины.

Размах (R) выборки значений случайной величины — разница между наибольшим и наименьшим значениями данной выборки.

Например, для выборки 2, 1, 1, 3, 5 размах $R = 5 - 1 = 4$.

Мода (Mo) — наиболее часто встречающееся значение случайной величины выборки.

Например, для выборки 2, 7, 2, 8, 9 мода $Mo = 2$; у выборки 7, 3, 2, 3, 2, 5, 4 две моды $Mo_1 = 3$ и $Mo_2 = 2$.

Медиана (Me) — серединное значение упорядоченного ряда значений случайной величины выборки.

Например, для выборки 6, 7, 7, 8, 9 медиана $Me = 7$; для выборки 5, 6, 6, 7, 8, 9 медиана $Me = \frac{6+7}{2} = 6{,}5$.

Дисперсия (D) — среднее арифметическое квадратов отклонения значений случайной величины от среднего значения выборки.

Например, для выборки 2, 1, 5, 4 (*среднее* значение которой равно $\frac{2+1+5+4}{4} = 3$) дисперсия

$$D = \frac{(2-3)^2 + (1-3)^2 + (5-3)^2 + (4-3)^2}{4} = 2{,}5.$$

МНОЖЕСТВА. ЛОГИКА

Элементы множества обычно обозначают строчными (малыми) буквами, а сами множества — прописными (заглавными) буквами латинского алфавита. Если элемент x является элементом множества A, записывают $x \in A$. Запись $x \in A$ означает, что элемент x не принадлежит множеству A.

Например, $15 \in N$, $\frac{5}{7} \notin N$, где N — множество натуральных чисел.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называют *пустым* и обозначают $\varnothing$.

Множества, состоящие из одних и тех же элементов, называют *равными*.

Например, если $A = \{-1; 0; 5\}$, $B = \{0; 5; -1\}$, то $A = B$.

Если каждый элемент множества B является элементом множества A, то множество B называют *подмножеством* множества A и записывают $B \subset A$ или $A \supset B$.

Например, если $A = \{3; 7; 12\}$, $B = \{3; 12\}$, то $B \subset A$.

Множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат как множеству A, так и множеству B, называют *пересечением* множеств A и B и обозначают $A \cap B$.

Например, если $A = \{-3; 4; 10\}$, $B = \{-1; 2; 4; 8\}$, то $A \cap B = \{4\}$; если $A = \{-5; 0\}$, $B = \{-2; 3; 6\}$, то $A \cap B = \varnothing$.

Множество, состоящее из всех тех и только тех элементов A и B, которые принадлежат хотя бы одному из этих множеств, называют *объединением* множеств A и B и обозначают $A \cup B$.

Например, если $A = \{5\}$, $B = \{-1; 8\}$, то $A \cup B = \{-1; 5; 8\}$.

Любое утверждение, о котором имеет смысл говорить, что оно истинно (верно) или ложно (неверно) называют *высказыванием*. Из каждого высказывания v можно получить новое высказывание $\bar{v}$, отрицая высказывание v. При этом, если высказывание v истинно (ложно), то высказывание $\bar{v}$ ложно (истинно).

Например, высказывание v: «число 5 чётное» — ложно, а высказывание $\bar{v}$: «число 5 не является чётным» — истинно.

Множество X, на котором задано предложение с переменной $p(x)$, можно разбить на два подмножества: одно содержит элементы X, для которых предложение $p(x)$ истинно (его называют *множеством истинности*), другое — для которых $p(x)$ ложно.

Например, множеством истинности предложения $p(x)$: $x^2 - 5x + 6 \geqslant 0$ является множество $A = (-\infty; 2] \cup [3; +\infty)$.

Предложение $q(x)$ является *следствием* предложения $p(x)$, если всегда, когда истинно предложение $p(x)$, оказывается истинным и предложение $q(x)$. Записывают: $p(x) \Rightarrow q(x)$. При этом множество истинности предложения $p(x)$ является подмножеством множества истинности предложения $q(x)$.

Например, предложение $q(x)$: «число x делится на 3» является следствием предложения $p(x)$: «число x делится на 6».

Предложения $p(x)$ и $q(x)$, заданные на одном и том же множестве, называются *равносильными*, если $p(x) \Rightarrow q(x)$ и $q(x) \Rightarrow p(x)$. Записывают $p(x) \Leftrightarrow q(x)$. Множества истинности равносильных предложений $p(x)$ и $q(x)$ совпадают.

Например, предложения $p(x)$: $x^2 < 9$ и $q(x)$: $|x| < 3$ равносильны.

Ответы

Глава 1. **1.** 2) 32; 4) 0. **2.** 2) 5; 3) 3^9; 4) 13^{10}. **3.** 2) $\left(\frac{c}{d}\right)^2$; 3) x^8y^7; 4) $x^{13}y^4$. **5.** 2) 21^{-3}; 4) a^{-9}. **6.** 2) $\frac{121}{81}$; 4) 32. **7.** 2) $\frac{53}{16}$; 4) -875. **9.** 2) $\frac{1}{(x+y)^3}$; 4) $\frac{9a^3}{b^4}$; 6) $\frac{a^2}{bc^4}$. **10.** 2) -125; 4) $\frac{1}{17}$. **11.** 2) 0,0016; 4) $\frac{16}{625}$. **12.** 2) b^8; 4) b^{-28}. **13.** 2) a^8b^{-4}; 4) $3^{-4}a^{-12}$. **14.** 2) $m^{12}n^{-15}$; 4) $-64x^{-15}y^3z^{-9}$. **15.** 2) $\frac{97}{9}$. **16.** 2) $2{,}7\cdot10^{-11}$; 4) $1{,}25\cdot10^8$. **17.** 2) $5{,}086\cdot10^{-8}$; 4) $1{,}6\cdot10^{-3}$. **18.** 0,003. **19.** 10^{-11}. **20.** 0,0001 мм. **21.** 2) a^5, $\frac{1}{32}$. **22.** 2) 0. **23.** 2) 0,43; 4) 1,44. **24.** 2) $8{,}51929\cdot10^5$; 4) $6{,}644672\cdot10^3$. **25.** 2) $3{,}22\cdot10^{16}$ км³. **26.** 2) $b-a$. **28.** 4) 15. **29.** 2) 81; 4) $\frac{1}{81}$. **30.** 2) -1; 4) -4; 6) -8. **31.** 2) $x=-\frac{1}{2}$; 4) $x_1=-2$, $x_2=2$. **32.** 2) x — любое число; 4) $\frac{2}{3}\leqslant x<2$. **33.** 2) 5; 4) -11; 6) $\frac{1}{30}$. **34.** 2) 2; 4) $4\sqrt{6}$. **35.** 1) $x-2$; 2) $(3-x)^3$ при $x\leqslant3$, $(x-3)^3$ при $x>3$. **36.** 3974. **37.** 2) 48; 4) 20. **38.** 2) 33; 4) 7. **39.** 2) 0,2; 4) 2. **40.** 2) 50. **41.** 2) a^4b^3; 4) a^4b^6. **42.** 2) $3ab$; 4) $\frac{2}{b}$. **43.** 2) $\frac{2}{3}$; 4) $\frac{3}{2}$. **44.** 2) $\frac{2}{5}$; 4) 2; 6) 4. **45.** 2) $3x$; 4) $\frac{2b}{a}$. **46.** 2) $\frac{1}{3}$; 4) $\frac{1}{4}$. **47.** 2) $4\sqrt{2}$; 4) 5. **48.** 2) y^2; 4) a^8b^9; 6) $3a$. **49.** 2) $\frac{3}{2}$; 4) $\frac{3}{2}$; 6) 4. **50.** 2) 6; 4) $\frac{1}{2}$; 6) 4. **51.** 2) $\frac{2a^2}{n}$; 4) $\frac{a}{n}$; 6) a^2b. **52.** 2) ab^2c; 4) $2xy$. **53.** 2) $3x$; 4) 0. **54.** 2) 7,55. **55.** 2) 7; 4) 1. **57.** 2) $2\sqrt[4]{b}$; 4) 1. **60.** 2) 3; 4) 27; 6) $\frac{1}{27}$. **61.** 1) 5; 3) $\frac{1}{2}$; 5) $\frac{1}{2}$. **62.** 2) 49; 4) 125. **63.** 2) 121; 4) 150. **64.** 2) 3; 4) 2,7. **65.** 2) b^1; 4) a^1. **66.** 2) 3. 4) $\frac{1}{5}$. **67.** 2) a^2b; 4) $x^{-3}y^{9{,}6}$. **68.** 2) 1; 4) $a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}$. **69.** 2) 3. **70.** 3) $b^{\frac{1}{2}}$; 4) $a+b$. **71.** 2) $a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}$; 4) $\sqrt{c}-1$. **72.** 2) $\frac{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}$; 4) $2\sqrt{b}$. **73.** 3) $2y$; 4) $2\sqrt[3]{b}$.

74. 2) $2\sqrt[3]{b}$; 4) $\frac{2\sqrt[3]{a}}{a+b}$. **75.** 2) 2,05; 4) 1,49; 5) 36,46. **77.** 2) $\left(\frac{5}{12}\right)^{-\frac{1}{4}} < (0,41)^{-\frac{1}{4}}$.
78. 2) $x=3$; 4) $x=2$; 6) $x=\frac{1}{2}$. **79.** 2) $\sqrt[5]{\left(1\frac{1}{4}-1\frac{1}{5}\right)^3} > \sqrt[5]{\left(1\frac{1}{6}-1\frac{1}{7}\right)^3}$. **80.** 2) $x=\frac{5}{2}$; 4) $y=5$. **81.** 2) $x=2{,}6$; 4) $x=4$. **82.** 2) $x=-\frac{1}{3}$; 4) $x=1$. **83.** 2) 6; 4) -3. **84.** 2) 2,1; 4) 27,2. **85.** 2) 0,07. **86.** 2) -3; 4) $\frac{25}{16}$. **87.** 2) 51; 4) 0,04; 6) $-0{,}1$. **88.** 2) 1000. **89.** 2) $\sqrt[4]{x}$; 4) $\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}$. **90.** 2) $x=-1$; 4) $x=1$. **91.** 2) $\frac{95}{16}$; 4) $-609\frac{8}{27}$. **92.** 2) x — любое число; 4) $x \leqslant 2$, $x \geqslant 3$; 6) $0 \leqslant x \leqslant 2$, $x \geqslant 3$. **93.** 2) $a+1$; 4) $a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}$; 6) $a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}$. **94.** $R<a$. **95.** 0,86 с.

Глава II. **96.** 2) $y=1$ при $x=2$, $y=5$ при $x=0$ и $x=4$, $y=10$ при $x=-1$ и $x=5$, $y=17$ при $x=-2$ и $x=6$. **97.** 1) $y(-2)=-1$, $y(0)=-5$, $y\left(\frac{1}{2}\right)=-11$, $y(3)=4$; 2) $y=-3$ при $x=-\frac{1}{2}$, $y=-2$ при $x=-1$, $y=13$ при $x=\frac{3}{2}$, $y=19$ при $x=\frac{4}{3}$. **99.** 2) $-2 \leqslant x < 3$; 4) $x \leqslant 2$, $x \geqslant 5$. **100.** 1) $y(-3)=3$, $y(-1)=1$, $y(1)=-1$, $y(3)=-1$; 2) $y=-2$ при $x=2$, $y=0$ при $x=0$ и $x=4$, $y=2$ при $x=-2$ и $x=6$, $y=4$ при $x=-4$ и $x=8$. **101.** 3) $x \neq -1$; 4) $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $x \geqslant 4$; 6) $x \geqslant 0$. **112.** 2) Нечетная; 4) не является ни чётной, ни нечётной. **113.** 2) Нечётная; 4) нечётная; 6) не является чётной и не является нечётной. **122.** 2) $x=0$. **123.** 2) $(-1; 0)$. **124.** 2) $y=-\frac{1}{2}$ при $x=-4$; 4) $y \leqslant 1$ при $x<0$ и при $x \geqslant 2$. **126.** 2) $(-2; 4)$ и $(2; -4)$; 4) $(-4; -2)$ и $(1; 3)$. **132.** 2) $x \leqslant 3$; 4) $y<5$; 6) $x<-5$, $x>5$. **133.** 2) Ребро куба больше 7 дм. **136.** 2) $x=10$; 4) $x=5$. **137.** 2) $x=2$; 4) $x_1=2$, $x_2=-7$. **138.** 2) $x=4$; 4) $x=0{,}2$. **139.** 2) $x=\frac{7}{3}$. **140.** 2) $x>-3$; 4) $x<2$; 6) $x<1$, $x>7$. **142.** 2) $x=-2$; 4) $x_1=1$, $x_2=3$. **143.** 2) $x=2{,}25$. **144.** 2) $x=1$; 4) $x=5$. **145.** 2) $x=4$. **146.** 2) $2 \leqslant x \leqslant 3$; 4) $1<x \leqslant 2$; 6) $x \geqslant 1$. **147.** Не меньше 6,24 м. **148.** 2) $x \neq \frac{3}{2}$; 4) x — любое число. **153.** 2) $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\sqrt{2}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \sqrt{2}\right)$; 4) $(-1; -1)$, $(1; 1)$. **154.** 2) $x>2$; 4) $x \leqslant -2$. **155.** 2) $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=\frac{1}{3}$; 4) $x=16$; 6) $x=-1$. **156.** 1) x — любое число; 2) $2 \leqslant x \leqslant 11$; 4) $x < -7$, $-3 \leqslant x < -1$, $x \geqslant 3$. **157.** 2) Убывает. **158.** 2) Нечётная. **160.** 2) $-2 \leqslant x \leqslant \frac{1}{3}$. **161.** 1) $-1 < x \leqslant 0$; $3 \leqslant x < 4$; 2) $x \geqslant 4$. **162.** 2) $x_1 = -1$, $x_2 = 7$; 4) $x_1 = 3$, $x_2 = 7$.

Глава III. **163.** 1) 9; 36; n^2; 2) 2; 5; n; $n+1$. **166.** 2) Да; 4) да. **167.** 2) 2, 1, 3, -1. **168.** 2) 9. **169.** 256, 16, 4, 2. **170.** 2) 1, $\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{9}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{\sqrt{3}}{27}$. **171.** $a_5 = -7$. **172.** 2) $2(n-9)$, $2(n-8)$, $2(n-5)$; 4) $7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}$, $7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+4}$, $7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+7}$. **174.** 2) -3, -1, 1, 3, 5. **176.** 2) 79; 4) -42. **177.** 2) $a_n = 29 - 4n$; 4) $a_n = 6 - 5n$. **178.** 12. **179.** Да. **180.** $n = 11$, нет. **181.** 2) 0,5. **182.** 2) -13. **183.** 2) -100. **184.** 2) $a_n = 5n - 17$. **185.** $n \geqslant 9$. **186.** $n < 25$. **187.** 2) $a_9 = -57$, $d = 7$; 4) $a_9 = -1$, $d = -1{,}5$. **188.** 44,1 м. **189.** 10 дней. **190.** 30. **191.** 60. **192.** 2) 10 050; 4) 2550. **193.** 4850. **194.** 4489. **195.** 2) -192. **196.** 2) 204. **197.** 2) 240. **198.** 4905, 494 550. **199.** 2) 2900. **200.** -45. **201.** 10. **202.** 2) $a_{10} = 15\frac{5}{6}$, $d = \frac{3}{2}$. **203.** 2) $a_1 = -88$, $d = 18$. **204.** 78 брёвен. **205.** 44. **206.** $a_1 = 5$, $d = 4$. **209.** 2) -3, 12, -48, 192, -768. **211.** 2) $\frac{1}{16}$; 4) $\frac{1}{81}$. **212.** 2) $b_n = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$; 4) $b_n = 3 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)^{n-1}$. **213.** 2) 5; 4) 8. **214.** 2) $\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{1}{5}$. **215.** 1) $b_8 = 4374$; 2) $n = 5$. **216.** 2) $b_7 = 3\sqrt{3}$, $q = \frac{1}{\sqrt{3}}$. **217.** 2) $b_5 = 6$, $b_1 = 30\frac{3}{8}$ или $b_5 = -6$, $b_1 = -30\frac{3}{8}$. **218.** 337 080 р. **219.** 0,25 см^2. **220.** 5. **222.** 2) $-\frac{31}{8}$; 4) $-\frac{275}{81}$; 6) -400. **223.** 2) 2186. **224.** 2) $b_1 = -1$, $b_8 = 128$. **225.** 2) $n = 7$; 4) $n = 5$. **226.** 2) $n = 9$, $b_9 = 2048$; 4) $n = 5$, $q = 7$. **227.** 2) 364; 4) 305. **228.** 2) $b_5 = 4802$, $S_4 = 800$. **229.** 2) $-1\frac{31}{32}$. **231.** 2) $q = 5$, $b_3 = 300$ или $q = -6$, $b_3 = 432$. **232.** 2) $q = 2$ или $q = -2$; 4) $S_5 = 781$ или $S_5 = 521$. **233.** 2) 4, 16, 64; 4) $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$. **234.** 2) $a_{10} = 1$, $a_{30} = \frac{39}{59}$; 4) $a_{10} = 0$, $a_{30} = 0$. **235.** $\frac{11}{16}$. **236.** 2) $d = -\frac{1}{2}$, $a_4 = 2$, $a_5 = 1\frac{1}{2}$; 4) $d = -3$, $a_4 = \sqrt{2} - 9$, $a_5 = \sqrt{2} - 12$. **238.** 2) $-5\frac{1}{3}$. **239.** 2) -1080. **240.** 2) 143; 4) 280,5. **241.** 2) -22. **242.** 2) $q = -\frac{1}{2}$, $b_4 = -\frac{1}{32}$, $b_5 = \frac{1}{64}$; 4) $q = -\sqrt{2}$, $b_4 = -10\sqrt{2}$, $b_5 = 20$. **243.** 2) $b_n = -0{,}5\,(-2)^{n-1}$.

244. 2) $b_4=\frac{125}{8}$. **245.** 2) $S_{10}=1\frac{85}{256}$; 4) $S_8=5$. **246.** 2) 242; 4) $\frac{65}{36}$. **247.** $\frac{3}{2}$.
248. $d=3$. **249.** 2) 14, 11, 8, 5, 2. **250.** $-\frac{5}{2}$. **251.** 2) $a_{19}=0$, $a_1=-108$.
252. 2) $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=-4$. **253.** 14. **254.** 2) $a_{16}=-1\frac{2}{3}$, $d=-\frac{2}{15}$. **255.** 2) 27.
256. 2) -27; 4) $\pm\frac{1}{25}$. **257.** 6. **258.** В среду. **259.** 180 раз. **260.** $a_1=8$, $d=-3$ или $a_1=2$, $d=3$. **261.** $a_1=5$, $d=-5$ или $a_1=-5$, $d=5$. **263.** 72. **264.** $1024a$. **265.** 3 ч.

Глава IV. **267.** 1) Случайное; 2) случайное. **268.** 1) Случайное; 2) невозможное. **269.** 1) Случайное; 2) случайное; 3) невозможное; 4) достоверное. **270.** 1) Невозможное; 2) достоверное. **271.** 1) Случайное; 2) невозможное; 3) невозможное; 4) случайное; 5) достоверное. **272.** 1) Совместные; 2) несовместные. **273.** 1) Несовместные; 2) совместные. **274.** 1) Совместные; 2) совместные; 3) несовместные; 4) несовместные. **277.** Не являются. **278.** 1) Не являются; 2) являются. **279.** 1) Являются; 2) являются; 3) являются; 4) не являются; 5) являются. **280.** 1) Являются; 2) не являются.
283. 1) $\frac{2}{5}$; 2) $\frac{3}{5}$; 3) 0; 4) 1. **284.** 1) $\frac{2}{9}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{4}{9}$; 4) $\frac{7}{9}$; 5) $\frac{2}{3}$; 6) $\frac{5}{9}$.
285. 1) $\frac{1}{10}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{3}{10}$; 4) $\frac{1}{5}$; 5) $\frac{1}{5}$; 6) $\frac{2}{5}$. **286.** $\frac{1}{10}$. **287.** 1) $\frac{1}{50}$; 2) $\frac{49}{50}$.
288. $\frac{24}{25}$. **289.** $\frac{1}{2}$. **290.** 1) $\frac{1}{36}$; 2) $\frac{1}{9}$; 3) $\frac{1}{18}$; 4) $\frac{5}{36}$; 5) $\frac{1}{12}$. **291.** $P(A)=\frac{8}{27}$; $P(B)=\frac{4}{9}$; $P(C)=\frac{2}{9}$; $P(D)=\frac{1}{27}$. **292.** 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{2}$. **293.** 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{4}$.
294. 1) $\frac{1}{36}$; 2) $\frac{1}{18}$; 3) $\frac{1}{6}$; 4) $\frac{1}{2}$; 5) $\frac{1}{4}$; 6) $\frac{1}{6}$; 7) $\frac{1}{6}$; 8) $\frac{1}{18}$; 9) $\frac{1}{12}$; 10) $\frac{1}{18}$; 11) $\frac{1}{12}$; 12) $\frac{1}{6}$. **295.** 1) $\frac{1}{18}$; 2) $\frac{1}{12}$; 3) $\frac{1}{18}$; 4) $\frac{1}{9}$. **296.** 1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{1}{6}$.
297. 1) $\frac{1}{24}$; 2) $\frac{1}{24}$. **298.** 1) $\frac{1}{216}$; 2) $\frac{1}{72}$. **299.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{3}$. **300.** $\frac{1}{6}$. **301.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$. **302.** 1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{2}{3}$. **303.** 1) $\frac{3}{5}$; 2) $\frac{2}{5}$. **304.** 1) $\frac{1}{630}$; 2) $\frac{1}{105}$. **305.** 1) Выпало нечётное число очков; $\frac{1}{2}$; 2) вынут либо туз, либо валет красной масти; $\frac{1}{6}$; 3) AB, $A\overline{B}$, $\overline{A}B$, $\overline{A}\,\overline{B}$. **306.** 1) 0,3, 0,4; 2) $\frac{1}{10}$, $\frac{9}{10}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{4}{5}$; 3) $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{12}$; 4) $\frac{35}{36}$, $\frac{17}{18}$. **307.** 1) 0,64; 0,04; 0,16; 0,96; 2) $\frac{1}{18}$, $\frac{1}{18}$, $\frac{5}{36}$, $\frac{5}{9}$; 3) $\frac{4}{49}$, $\frac{25}{49}$, $\frac{10}{49}$,

$\frac{10}{49}, \frac{24}{49}, \frac{45}{49}$; 4) $\frac{1}{81}, \frac{1}{324}, \frac{1}{324}, \frac{5}{324}$. **309.** $\frac{238}{250}$. **310.** 2,5%. **311.** $P \approx 0{,}6$. **312.** $P_1 \approx 0{,}84$; $P_2 \approx 0{,}14$. **314.** 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{5}{12}$; 4) $\frac{3}{4}$; 5) $\frac{2}{3}$; 6) $\frac{7}{12}$; 7) 0; 8) 1. **315.** 1) $\frac{1}{30}$; 2) $\frac{29}{30}$; 3) $\frac{1}{6}$; 4) $\frac{1}{5}$, 5) $\frac{1}{3}$; 6) $\frac{2}{15}$. **316.** 0,01. **317.** 1) $\frac{1}{12}$; 2) $\frac{1}{4}$. **318.** 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{18}$; 3) $\frac{1}{4}$; 4) $\frac{1}{2}$. **319.** 1) $\frac{1}{9}$; 2) $\frac{1}{18}$; 3) $\frac{1}{6}$; 4) $\frac{4}{9}$. **320.** 1) $\frac{1}{8}$; 2) $\frac{1}{8}$. **321.** 1) $\frac{3}{10}$; 2) $\frac{1}{10}$; 3) $\frac{3}{5}$; 4) $\frac{2}{5}$. **322.** 1) $\frac{11}{36}$; 2) $\frac{3}{4}$.

Глава V.

324.

X	0	1	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

325.

X	2	3	4	5	6	7	8
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

326.

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$

328.

X	34	35	36	37	38	39	40
M	1	3	4	6	3	2	1
W	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$

330. В таблице приведён результат анализа страницы текста из «Севастопольских рассказов» Л. Н. Толстого.

А	Б	В	Г	Д	Е (Ё)	Ж	З
0,090	0,027	0,056	0,012	0,025	0,087	0,007	0,013
И	Й	К	Л	М	Н	О	П
0,057	0,007	0,036	0,045	0,029	0,066	0,137	0,025
Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч
0,047	0,061	0,054	0,017	0,001	0,014	0,007	0,014
Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я
0,012	0,006	0,001	0,008	0,015	0,002	0,010	0,012

331. Онегин, добрый мой приятель, родился на брегах Невы, Где, может быть, родились вы Или блистали, мой читатель.

335. 1)

X	145—149	150—154	155—159	160—164	165—169	170—174	175—179	180—184
M	1	9	14	8	7	6	3	2

337. 1. 3); 2. 3); 3. 3). **339.** 200. **340.** 240. **341.** 60; 100; 120; 240; 220; 140; 80; 40. **342.** 9600; 6000; 4800; 4200; 3300; 1500; 600. **343.** 1) 8; 2 и 6; 4; 2) 11; 2; 2. **344.** 1) 3; 3; 3; 2) 7; 3 и 5; 3. **345.** 1) $Mo=-2$; $Me=1$; 2) $Mo_1=0{,}1$, $Mo_2=0{,}2$, $Mo_3=0{,}4$, $Mo_4=0{,}5$; $Me=0{,}35$. **346.** 1) 3; 2) $-0{,}5$; 3) $2\frac{1}{7}$; 4) 5. **347.** 1) $2\frac{1}{7}$; 2) 2,5. **349.** 7,00 г/см^3; железо. **350.** 12,25 лет; 13 лет. **351.** 135 см — высота, являющаяся медианой и модой совокупности, а также приближённым средним значением совокупности, из которой удалён «случайный» результат 90 см. **352.** $\overline{X}\approx 12$ лет; $Mo=19$ лет; $Me=11$ лет. **353.** 2) 8. **354.** 2) 4. **355.** 2) 4; 1; -3; -2. **357.** 2) 2,5 г^2; 4) 9,2 м^2. **358.** 1) 2,56; 2) 4,96. **359.** 1) $D_1<D_2$; 2) $D_1>D_2$. **360.** 1) $D_1<D_2$; 2) $D_1>D_2$. **361.** Второй игрок более стабилен. **362.** Средние результативности одинаковы; первый футболист более стабилен.

363.

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
P	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{5}{64}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{7}{64}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{64}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{5}{64}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$

364. 2)

Размер (X)	42	44	46	48	50	52	54	56	58
Кол-во халатов (M)	1500	3000	9000	18 000	16 500	10 500	9000	4500	1500

3) $Mo=48$, $Me=50$, $\overline{X}\approx 50$, $R=16$.

Глава VI. **367.** Верно, что $6\in M$, $-3\notin M$. **368.** Верно, что $1\in A$, $8\notin A$. **369.** Верно, что $12\in B$, $3\in B$. **370.** 2) $\{1; 5\}$, $\{1\}$, $\{5\}$, $\varnothing$; 4) $\{4; 5; 6\}$, $\{4; 5\}$, $\{5; 6\}$, $\{4; 6\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{6\}$, $\varnothing$. **371.** 2) -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4) -2; -3. **372.** 1) Окружность с центром в точке A и радиусом 3; 2) серединный перпендикуляр к отрезку AB. **373.** 1) $\{-3\}$; 2) $\{-1; 1; 2\}$. **374.** 2) $A\backslash B=\{2; 3\}$, $B\backslash A=\{-1; 0\}$; 4) $A\backslash B=\{7\}$, $B\backslash A=\{-5; -6\}$. **375.** 1) иррациональные; 2) целые отрицательные числа и число 0. **376.** 2) $A\cap B=\{c\}$, $A\cup B=\{a; b; c; d\}$; 4) $A\cap B=\varnothing$, $A\cup B=\{a; c; d; e\}$. **377.** 2) $A\cap B=\{1\}$, $A\cup B=\{-1; 0; 1; 2; 3\}$; 4) $A\cap B=\{5; 6\}$, $A\cup B=\{-6; -5; 5; 6; 7\}$. **378.** $[4; 7]$, $[2; 9]$. **379.** $[6; 7]$, $[5; 8]$. **380.** $\{-2\}$, $\{-2; 6; 7\}$. **381.** $A\cap B=\{1; 3; 9\}$; НОД (18, 45). **382.** $C\cap D=\{x{:}\ x=90k,\ k\in M\}$; НОК (18, 45). **383.** $\{0; 1; 2\}$. **384.** $\{-1; 0; 1; 3\}$. **385.** 2) $(-\infty; 1]$; $\{-1; 0\}$. **386.** 1) A_1; 2) A_2; 3) A_1; 4) A_3; 5) A_4; 6) A_4; 7) A_1. **387.** 1) $7\neq 7$, 2) $45<3$; 3) любое натуральное число не является целым числом; 4) у Земли не только один естественный спутник. **388.** 2) $\{5; 10; 15; 20; 25\}$; 4) 1. **389.** 2) $[2; 3]$; 4) R. **390.** 2) Истинно, истинно; 4) ложно, истинно. **391.** 2) Ложно, истинно; 4) истинно, истинно. **392.** 2) «Если каждый член последовательности, начиная со второго, равен полусумме соседних с ним членов, то эта последовательность — арифметическая прогрессия». **393.** 3) «Если диагональ четырёхугольника делит его на два равных треугольника, то этот четырёхугольник — параллелограмм»; ложна. **394.** 2) Равносторонний треугольник; 4) равносторонний треугольник. **395.** 2) $n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3 = 3(n + 1)$, т. е. сумма трёх последовательных натуральных чисел делится на 3. **396.** 1) Достаточно; 2) необходимо и достаточно; 3) необходимо. **407.** 2) $2\sqrt{5}$; 4) $\sqrt{29}$; 6) 10. **408.** 2) $x^2 + y^2 = 49$. **409.** 1) A, E; 2) D, F. **410.** 2) $(x + 3)^2 + y^2 = 4$; 4) $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 0{,}25$; 6) $(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 3\frac{1}{16}$. **411.** 2) (2; 5), (−10; 5). **413.** 2) (−1,5; 2,5); 4) (−4; −2,5). **414.** 2) K (0; 1). **415.** 2) P (−2,9; 0). **416.** 2) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$; 4) $(x + 4)^2 + (y + 4)^2 = 52$. **417.** 2) $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 10$. **418.** 2) Окружность с центром в точке C (4; 6) и радиусом $r = 8$; 4) окружность с центром в точке C (3; −1) и радиусом $r = \sqrt{10}$. **419.** 2) $x - 2y = 0$; 4) $5x + 2y = 0$. **420.** 2) $x - 3y = 2$; 4) $4x - 5y = 27$. **421.** 2) $x - 4 = 0$, $y + 7 = 0$. **422.** 2) $k = 4$; 4) $k = -2{,}5$. **423.** 2) Пересекаются; 4) совпадают; 6) параллельны. **424.** 2) Параллельны; 4) пересекаются; 6) совпадают. **425.** 2) (6; −1). **426.** 2) $4x + 3y = 9$. **427.** $2x + 5y = -4$, $2x - 3y = -4$, $2x + y = 4$. **428.** 2) (0; 0,5), $\left(\frac{2}{3}; 0\right)$. **429.** 2) $a = 1$, $b = 3{,}5$. **430.** 2) $x - y = 1$. **433.** 2) Две точки с координатами $x_1 \approx 3{,}6$, $y_1 \approx -1{,}6$; $x_2 \approx -1{,}6$; $y_2 \approx 3{,}6$; 4) точки с координатами (0; 0), (2; 2) и (−2; 2). **434.** 2) Две точки с координатами (0; 0) и (1; 1). **441.** 2) $\{1; 2\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\varnothing$; 4) $\{m; n; p\}$, $\{m; n\}$, $\{m; p\}$, $\{n; p\}$, $\{m\}$, $\{n\}$, $\{p\}$, $\varnothing$. **442.** 2) $\{-3; 1\}$; 4) $\{k; l; m; p\}$. **443.** 2) $A \setminus B = \{f\}$, $B \setminus A = \{a; d\}$; 4) $A \setminus B = \{3; 7\}$, $B \setminus A = \{2; 4\}$. **444.** 2) $M \cup K = \{a; b; c; d; e; k\}$, $M \cap K = \{a; c; e\}$; 4) $M \cup K = \{-5; -3; -1; 1; 2; 3\}$, $M \cap K = \varnothing$. **445.** 2) [−6; 2]; [−4; −2]; 4) [−5; 2]; $\{-2\}$. **446.** 2) $17 \neq 17$; 4) $15 \geqslant 7$. **447.** 2) $\{1; 3; 5; 9; 15; 45\}$; 4) $\{-3; -2; -1; 0; 1; 2\}$. **448.** 2) $\{4\}$; 4) $\{-3\}$. **449.** 2) Истинно, истинно; 4) ложно, истинно. **450.** 2) Нечётное число 5 не делится на 3; 4) сумма, углов треугольника не равна 360°. **451.** 2) $6\sqrt{2}$; 4) $3\sqrt{10}$. **452.** 2) $x^2 + y^2 = 2{,}25$. **453.** 2) $(x - 2)^2 + (y + 6)^2 = 16$; 4) $(x + 1{,}5)^2 + (y + 3)^2 = 25$. **454.** 1) A, D; 2) B, C. **455.** 2) $4x - 5y = 20$; 4) $14x + 13y = -33$. **456.** 2) $\frac{4}{5}$; 4) $-\frac{2}{3}$. **457.** $x + y = 1$ и $2x + 2y = 5$; $2x - 4y = 3$ и $-x + 2y = 4$. **458.** $3x + y = 2$, $\frac{x}{2} + y = 2$. **461.** 2) (−3; 3]; $\{-1\}$; 4) (−3; −7); [2; 4]. **462.** 2) Ложно, истинно; 4) истинно, истинно; 6) ложно, истинно; 8) ложно, истинно. **463.** 2) «Если $ab > 0$, то $a > 0$ и $b > 0$», ложно; 4) «Если отрезок параллелен одной из сторон треугольника, то этот отрезок является средней линией треугольника», ложно. **464.** 2) (−2; 3), (−1; −1), (1; 2). **465.** 2) (−19; 13). **466.** (2; 9). **467.** (−3,5; −3). **468.** 2) $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 26$. **469.** $(0; 3 + \sqrt{5})$, $(0; 3 - \sqrt{5})$. **470.** $(4 + \sqrt{7}; 0)$, $(4 - \sqrt{7}; 0)$. **471.** 2) (2; 0), (0; 2). **472.** $2x - 11y = 10$, $7x - 4y = 12$, $5x + 7y = 2$. **473.** 2) (1; −6). **474.** 2) Точка с координатами $\left(-\frac{1}{3}; 4\right)$; 4) две прямые: $x = 8$ и $y = -9$; 6) две прямые:

$3x - \sqrt{5}y = 0$ и $3x + \sqrt{5}y = 0$. **476**. 2) Две точки с координатами $x_1 \approx 1{,}6$, $y_1 \approx 3{,}6$ и $x_2 \approx -1{,}6$, $y_2 \approx 3{,}6$; 4) две точки с координатами $x_1 \approx -0{,}2$, $y_1 \approx -0{,}3$ и $x_2 \approx -1{,}8$, $y_2 \approx -0{,}3$; 6) точка с координатами $x \approx 0{,}7$, $y \approx 1{,}3$.

Упражнения для повторения курса алгебры VII—IX классов

477. 1) $-1{,}8$; 2) $22{,}75$. **478**. 2) Значения выражений равны. **479**. 2) $x = \frac{1}{8}$.

480. 2) $2\frac{1}{3}$; 4) $\frac{2x^2}{3y}$. **481**. 2) $3 - \sqrt[3]{2}$; 4) $6\sqrt{7}$. **482**. 2) $(0{,}3)^{\sqrt{2}} < (0{,}37)^{\sqrt{2}}$.

483. 2) $5ab\sqrt{b}$; 4) $11ab\sqrt{ab}$. **484**. 2) $-\sqrt{3x^2}$; 4) $\sqrt{5a^2}$. **485**. 2) $x = \frac{1}{9}$; 4) $x = 0$.

486. 2) Нет. **487**. 2) Нет. **488**. 2) $1{,}5 < x \leqslant 7$; 4) $x \geqslant -7{,}5$; 6) $0 \leqslant x < 2$, $x > 2$. **490**. Нет. **491**. 2) $a_n = 3^n$. **492**. 1, 4, 28, 280. **493**. 2) $a_{12} = 47{,}5$, $S_{12} = 537$; 4) $a_{18} = 11\frac{2}{3}$, $S_{18} = 108$. **494**. 1220. **496**. 2) $b_1 = 5$. **497**. 2) $b_4 = 125$, $S_4 = 156$; 4) $b_5 = 81$, $S_5 = 61$. **498**. $15\frac{3}{4}$. **499**. 1679 м/с. **500**. 1,68 м. **501**. $-1\frac{1}{7}$.

502. 2) $x_{1,2} = \pm 2$. **503**. 2) $(1; 3)$, $(-1; -3)$. **504**. 2) -1; 4) $-\frac{1}{x}$. **505**. Первое.

506. Убывает. **507**. 2) $x \leqslant 0$, $x \geqslant 6$; 4) $x \neq \sqrt{3} \pm \sqrt{6}$; 6) $x \leqslant -3$, $0 < x < 2$, $x \geqslant 3$.

509. 2) $x = 61$; 4) $x = 2$; 5) $x_1 = 0$, $x_2 = -3$, $x_3 = 2$. **510**. 8 ч. **511**. $39\frac{2}{3}$.

512. 7, -28, 112, -448 или $-11\frac{2}{3}$, $-46\frac{2}{3}$, $-186\frac{2}{3}$, $-746\frac{2}{3}$. **513**. $b_1 = 5$, $b_5 = 405$. **514**. 8, 13, 18 или 20, 13, 6. **515**. 6,40 Ом. **517**. 1) $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{7}}{\sqrt{2}}$;

2) $\frac{1 + \sqrt{7}}{\sqrt{2}}$. **518**. 1) $1 - \sqrt{a}$; 2) $a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}$. **520**. 10, 4, -2, 1 или $-\frac{5}{4}, \frac{1}{4}, \frac{7}{4}, \frac{49}{4}$.

521. 6, 18, 54 или 26, 26, 26. **522**. 2) 4; 4) $4\frac{3}{4}$. **523**. 2) 5,8; 4) $-\frac{1}{11}$. **524**. 2) $x = 7$; 4) $x = 6{,}5$; 6) $x = 2{,}25$. **525**. 2) 3; 4) 0,1125.

526. 2) 300; 4) 3600. **527**. 2) 5%; 4) $16\frac{2}{3}$%. **528**. 2) $5a^4b$; 4) $-\frac{8}{3}a^6b^7$.

529. 2) $35 - 2x - 2x^3 - x^5$; 4) $8a^2 + 4b^2 + 36a + 36$. **530**. 2) 4,9; 4) 2.

531. 2) $b^2 - 7a^2b^3$. **532**. 2) $\left(\frac{b}{3} - 1\right)\left(\frac{b}{3} + 1\right)$; 4) $(b - \sqrt{3})(b + \sqrt{3})(b^2 + 3)$.

533. 2) $\left(\frac{b}{2} + 1\right)^2$; 4) $(1 + 9b)^2$. **534**. 2) $(a + 1)(a - x)$; 4) $(a - x)(5a - 7)$.

535. 2) $2a^3b(a - 1)^2$; 4) $(a - b)^2(a + b)^2$. **536**. 2) $2(x - 3)^2$; 4) $(x - 1)(x + 2)$.

537. 2) $\frac{b+3}{3b}$; 4) $\frac{3y}{4x}$; 6) $\frac{x+4}{x+5}$; 8) $\frac{x-1}{x+2}$. **538.** 2) $\frac{3}{2}m^2$; 4) $\frac{3c^2}{k^3}$; 6) $\frac{15a}{4c}$; 8) $(x+1)(x-2)$. **539.** 2) $\frac{6-5a}{a^2-4}$; 4) $\frac{3b-a^2}{a(b^2-a^2)}$. **540.** 2) $\frac{1}{2a+3}$; 4) $b+a-1$. **541.** 2) $\frac{2}{a(a+2)}$; 4) $\frac{1}{a+1}$. **542.** 3) $\frac{x}{y}$; 4) $\frac{10}{2a+1}$. **543.** 2) $-0{,}25$; 4) $1\frac{9}{16}$. **544.** 2) 3. **545.** 2) $\frac{1}{x+\sqrt{2}}$; 4) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$. **546.** 2) 4; 4) 8. **547.** 2) -2; 4) 0; 6) 7. **548.** 2) 2; 4) 14. **549.** 2) $\frac{\sqrt{3}}{11}$; 4) $6\sqrt{2}$. **550.** 2) $2\cdot 10^{-3}$; 4) $1{,}2\cdot 10^{-3}$. **551.** 2) 1,25. **552.** 2) 3,5. **553.** 2) x^2y^9; 4) xy^2. **554.** 2) -1; 4) $1+\sqrt{m}$. **555.** 100 кг. **556.** 10%. **557.** 340 кг. **558.** 44 р. **559.** 3) $-6m^4+27m^3-47m^2+41m-7$; 4) $a^4b^2-6a^2b^3+9b^4$. **560.** 2) $(4a^3-5b^4)(4a^3+5b^4)$; 4) $(m-n+k)\times(m+n-k)$; 6) $\left(\frac{1}{5}a^3b-\frac{2}{7}c^4\right)\left(\frac{1}{5}a^3b+\frac{2}{7}c^4\right)$; 8) $(a+b+2)^2$. **561.** 2) $(2a-3b^2)^2$; 4) $(5b^2+4a)^2$. **562.** 3) $(5x-3y)\left(x\sqrt{5}+2y\right)\left(x\sqrt{5}-2y\right)$; 4) $(xy-3)(8y^2-7a)$. **563.** 3) m^2; 4) $-\frac{b}{3a}$. **564.** 2) $-0{,}6$. **565.** 3) 1; 4) 6; 5) $\frac{3}{32}$; 7) 6. **566.** 2) $\frac{1}{x^2+xy+y^2}$; 4) $\frac{m}{\sqrt{m}+1}$. **567.** 4) $-0{,}5$. **568.** 2) $-0{,}02x^6y$. **569.** 2) $33\frac{1}{3}$; 4) 4,8. **570.** 3) $\sqrt{a}-1$; 4) $\frac{a}{16-a^2}$. **571.** 2) $1-\sqrt{b}$; 4) $1+m\sqrt{m}$. **572.** 2) $x=1$; 4) $x=-0{,}5$. **573.** 2) $x=12\frac{1}{14}$; 4) $x=-13{,}5$. **574.** 2) $x=3$; 4) $x=-9$. **575.** 2) $x_1=-2$, $x_2=3$; 4) $x_1=5$, $x_2=-1$. **576.** 2) $x_1=0$, $x_2=5$; 4) $x_1=0$, $x_2=-\frac{1}{6}$; 6) $x_{1,2}=\pm 2\sqrt{2}$; 8) $x_{1,2}=\pm 2$. **577.** 2) $x_1=-1$, $x_2=1{,}5$; 4) $x_1=5$, $x_2=-\frac{3}{4}$. **578.** 2) Не имеет; 4) имеет. **579.** 2) $x_1=1$, $x_2=4{,}5$; 4) $x_1=-5$, $x_2=0{,}5$. **580.** 2) $x_1=-3$, $x_2=5$; 4) $x=-1$; 6) $x_1=4{,}3$, $x_2=-11{,}7$. **581.** 2) $x=3$; 4) $x=-4$. **582.** 2) $x_{1,2}=\pm 1$, $x_{3,4}=\pm 6$; 4) $x_{1,2}=\pm 2$. **583.** 2) $x=33$; 4) $x=9$; 6) $x_1=1$, $x_2=4$. **584.** 2) $x_{1,2}=2\pm\sqrt{3}$, $x_{3,4}=\frac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$. **585.** 2) $x=-1$; 4) $x_1=1$, $x_2=-0{,}5$; 6) $x=4$. **586.** 2) (3; 7); 4) (2; 3); 6) (−2; −3). **587.** 2) (1; −1); 4) (2; 2). **588.** 2) (5; 3), (−3; −5); 4) (4; −9), (−9; 4); 6) (4; 5), (−4; −5), (5; 4), (−5; −4). **589.** 2) $x=6$; 4) $x=0{,}5$. **590.** 2) $3\left(1+\sqrt{5}\right)$; 4) $x=\frac{9+4\sqrt{2}}{7}$. **591.** 2) $x_1=0$, $x_2=2$; 4) $x\leqslant 1$. **592.** 2) $x=2$; 4) $x=-1$.

593. 2) $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = -3$. **594.** 2) $x = 4$; 4) $x = 3$; 6) $x = 0$. **595.** 1) $x_1 = 0$, $x_2 = a$; 2) $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{a}$; 3) $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{b}{a}$; 4) $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{a}{b}$. **597.** 2) (5; 4); 4) (1; 1). **598.** 1) (2; –1), (–2; 1), (0,5; –0,5), (–0,5; 0,5); 2) (2; 8), (–2; –8), (8,5; –5), (–8,5; 5); 3) (1; 2), (2; 1); 4) $\left(\frac{6}{13}; \frac{6}{11}\right)$; 6) (3; 9), (–3; –9), $(\sqrt{3}; -2\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}; 2\sqrt{3})$; 8) $\left(3; \frac{3}{2}\right)$. **600.** 2) $x \leqslant \frac{22}{27}$; 4) $x > 1$. **601.** 2) $x \leqslant 1$; 4) $x < 3\frac{1}{6}$; 6) $x < 2$. **602.** 2) $x \geqslant -1,5$; 4) $x \geqslant 3$. **603.** 2) 1; 2; 3; 4. **604.** 2) –1; 0; 1; 2; 4) –1; 0; 1; 2; 3. **605.** –4; –3; –2. **606.** 2) $-1 \leqslant x \leqslant 3$; 4) $\frac{3-\sqrt{5}}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3+\sqrt{5}}{2}$; 6) решений нет; 8) $x < -1\frac{1}{3}$, $x > 1$. **607.** 2) $-1\frac{1}{3} < x < 3\frac{1}{3}$; 4) $-1 \leqslant x \leqslant 3$. **608.** 2) $-4 < x < 2$; 4) $0 < x < 7$, $x > 8$; 6) $x \leqslant -3$, $-0,5 \leqslant x \leqslant 0,5$. **609.** 2) $9 > 4\sqrt{5}$; 4) $5\sqrt{6} < 6\sqrt{5}$; 6) $2\sqrt[3]{3} < \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{5}$. **610.** –9. **611.** $x = 10$. **612.** 2) $x \leqslant -2\frac{2}{3}$, $x \geqslant 4$; 4) $x = -0,4$. **613.** 2) $x < -1$, $x > 1$; 4) $x < 0$, $x > 2$. **614.** 2) $x < 2$; 4) $-2 < x < 2$; 6) $-1 < x < 0$; 8) $x < -1$, $x > 1$. **615.** 2) $-5 < x < -1$, $x > 4$; 4) $x < 1$, $3 < x < 4$; 6) $-7 < x < -6$, $1 < x < 3$, $x > 8$. **617.** 62,5 и 57,5. **618.** 5 км/ч. **619.** 4 км/ч. **620.** 12,5 км/ч, 2,5 км/ч. **621.** 26 см, 2 см. **622.** 48 мин. **623.** 20 мин. **624.** 35 ц, 40 ц. **625.** 5 ч, 7 ч. **626.** 32 и 8 лет. **627.** 40 м/мин^2. **628.** 2,5 км. **629.** ≈5 с. **630.** 4 км/ч, 16 км/ч. **631.** 75 км/ч. **632.** $16\frac{2}{3}$ м/с, 100 м. **633.** 2) Да; (0; –4), (8; 0), $y(-2) = -5$; 4) нет; (0; 6), (4; 0), $y(-2) = 3$. **636.** 2) (5; –10); 4) $\left(\frac{5}{4}; -\frac{1}{8}\right)$. **637.** 2) 23; 4) $6\frac{1}{4}$. **638.** 2) $x_1 = -2$, $x_2 = -5$; 4) $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm 1$. **640.** 2) $\sqrt[3]{-\frac{2}{9}} < \sqrt[3]{-\frac{1}{7}}$. **642.** $a = 8$, $b = 3$. **643.** $a = 0,3$, $b = -0,5$, $c = 0,2$. **648.** 2) Не является чётной и не является нечётной; 4) нечётная. **649.** 2) Да. **650.** 2) –1; 4) –1. **651.** –2. **652.** –0,5. **653.** 2) $a_1 = 201$, $S_{17} = 2737$. **654.** $n = 39$. **655.** 682. **656.** 2) 0,5; 4) $\frac{1}{16}$. **657.** 189. **658.** 2) $a_1 = 1$, $d = 3$; 4) $a_1 = 2$, $d = 3$ или $a_1 = 14$, $d = -3$; 6) $a_1 = 2$, $d = 3$ или $a_1 = 8$, $d = -3$. **659.** 2) –5. **660.** $a_1 = 1$, $d = -2$. **661.** 2) Да; 4) да. **662.** 2) 12 или –13; 4) $\frac{1}{12}$ или $-\frac{13}{12}$. **663.** $b_n = 3\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}$ или $b_n = -3\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$. **664.** $b_4 = 12$, $q = -2$ или $b_4 = -12$, $q = 2$. **665.** $\frac{1}{3}$; 1; 3; 9; 27 или $\frac{1}{3}$; –1; 3; –9; 27. **666.** 2) $b_1 = 0,384$,

$q=0{,}25$ или $b_1=0{,}6$, $q=-0{,}2$. **667.** $b_1=37{,}5$, $q=0{,}6$ или $b_1=48$, $q=0{,}25$. **668.** 2) 341; 4) 341 или 121. **669.** 18; 5; 2 или 2; 5; 18. **670.** $x=1$. **671.** 13 шахматистов. **672.** $\frac{a+4}{a-a^2-1}$. **673.** $x=1$. **674.** 4. **675.** $m=-1$, $y<0$ при $x>-\frac{1}{3}$. **676.** (−3; 4). **677.** 32. **678.** Корней нет. **679.** $1<x<1\frac{1}{3}$. **681.** $x<-1$, $x>5\frac{2}{3}$. **682.** $14\frac{6}{7}$. **683.** $\frac{x+5}{x+3}$. **684.** $\left(13\frac{1}{16}; -3{,}7\right)$. **686.** 1) $\frac{1}{36}$; 2) $\frac{1}{6}$. **687.** $x_1=4$; $x_2=-\frac{2}{3}$. **688.** $x\leqslant-1$. **689.** 2. **690.** $170\frac{2}{3}$. **691.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{7}{12}$. **692.** 0. **693.** $x_1=0$, $x_2=45$. **694.** 60 км/ч, 80 км/ч. **695.** $x_1=1$. **696.** В третьем. **697.** $x>2{,}5$. **698.** 1. **699.** 110. **701.** 1; 15; 2; 4; 2. **702.** $(y-2)(5y-z)$. **703.** $\frac{a^3}{a-b}$. **704.** $x_1=3$, $x_2=-3$. **705.** $\frac{1}{8}$. **706.** 25. **707.** 0,2. **708.** $x<0{,}5$, $x\geqslant3$. **709.** (1; 1). **710.** $p=2$, $q=3$. **711.** 63. **712.** (2; 1). **713.** $\frac{2a-1}{a-2}$. **714.** $p=-1$, $q=-2$, $\left(\frac{1}{2}; -\frac{9}{4}\right)$, $-1<x<2$. **715.** $\frac{63}{8}$. **716.** $x=0$, $x=1$, $x=2$, $x=3$, $x=4$. **717.** Да. **718.** $\frac{2a+1}{a+5}$. **719.** 60 км/ч, 40 км/ч. **720.** 33.

Задачи повышенной трудности

736. $n=1$. **737.** (4; 1), (4; −3), (−4; 1), (−4; −3). **738.** 7, 8, 9, 10. **743.** 1) $\sqrt{2}-1$; 2) $\sqrt{2}$; 3) $\frac{2}{2-x}$; 4) $\sqrt[6]{a}$. **744.** 1) $x_1=-2$, $x_2=6$, $x_3=3-\sqrt{21}$, $x_4=3+\sqrt{21}$; 2) $x_1=2$, $x_2=\frac{1}{2}$, $x_3=3$, $x_4=\frac{1}{3}$; 3) $x=15$; 4) $x_1=0$, $x_2=2$. **745.** 1) $x_1=-4$, $x_2=1$; 2) $x=3$. **746.** 1) (3; 2), (−2; −3); 2) (0; 0), (1; 2), (2; 1). **747.** 1) (−4; −5), (−5; −4), $(-1+2\sqrt{3}; -1+2\sqrt{3})$, $(-1-2\sqrt{3}; -1-2\sqrt{3})$, $(4+\sqrt{13}; 4-\sqrt{13})$, $(4-\sqrt{13}; 4+\sqrt{13})$; 2) (1; 2), (−1; −2), $\left(\frac{9}{\sqrt{67}}; \sqrt{67}\right)$, $\left(-\frac{9}{\sqrt{67}}; -\sqrt{67}\right)$; 3) (6; 6), $\left(\frac{3\sqrt{5}-3}{2}; -\frac{3\sqrt{5}+3}{2}\right)$, $\left(-\frac{3\sqrt{5}+3}{2}; \frac{3\sqrt{5}-3}{2}\right)$; 4) $\left(2+2\sqrt{3}; 1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(2-2\sqrt{3}; 1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; 5) (0; 0), (2; 1), (−2; −1), (1; 2), (−1; −2); 6) (3; 1), $\left(\frac{1}{3}; -1\right)$. **749.** 1) (0,5; 5,5), (1,5; 5,5); 2) (1; 1); 3) (1; 2); 4) $(-2\sqrt{2}+\sqrt{3}; -2\sqrt{2}-\sqrt{3})$, $(2\sqrt{2}-\sqrt{3}; 2\sqrt{2}+\sqrt{3})$, $\left(\frac{5}{\sqrt{2}}; -\frac{7}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\frac{5}{\sqrt{2}}; \frac{7}{\sqrt{2}}\right)$. **750.** 1) $r=1$, $r=-1$; 2) $r=-2$.

751. $-2{,}25 \leqslant a \leqslant -2$. **752.** $a = -\frac{1}{2}$. **753.** $-\frac{7+3\sqrt{5}}{2} \leqslant a \leqslant 2\sqrt{3} - 4$. **755.** $p=-2$, $q=-1$ или $p=1$, q — любое. **756.** $-1 < r < 2$. **757.** $a < -2$. **766.** $(x^2+x+1)\times$ $\times(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)$. **767.** 1) $\frac{a+2}{a-1}$; 2) $\frac{a^2+1}{a-1}$. **769.** 1) $-\frac{1}{\sqrt{6}} < x < \frac{2}{5}$, $\frac{1}{\sqrt{6}} < x < 1$; 2) $x < -\frac{3\sqrt{7}}{2}$, $-3 < x < \frac{3\sqrt{7}}{2}$, $x > 4$; 3) $x < -2$, $-1 < x < 1$, $x > 2$; 4) $-3 < x < -2$, $-1 < x < 1$, $3 < x < 5$; 5) $3 \leqslant x \leqslant 6$; 6) $2 < x < 4$. **770.** 1) $-1 \leqslant x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2} < x \leqslant 1$; 2) $-2 \leqslant x < -\frac{8}{5}$, $0 < x \leqslant 2$; 3) $-2 < x \leqslant 0$, $x \geqslant 6$; 4) $0 < x \leqslant \frac{4}{3}$; 5) $x < -\frac{3}{2}$, $x > \frac{7}{10}$; 6) $-2 < x < 1$, $x > 1$. **771.** 3, 8, 13 или 18, 8, -2. **772.** 4092 или $\frac{1023}{2}$. **773.** 3, 6, 12, 18 или $\frac{75}{4}$, $\frac{45}{4}$, $\frac{27}{4}$, $\frac{9}{4}$. **778.** $S_n = \frac{1-(n-2)x^{n+1}+(n+1)x^{n+2}}{(1-x)^2}$, если $x \neq 1$; $S_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, если $x = 1$. **779.** $\frac{2}{3}\left(\frac{10^{n+1}-10}{9} - n\right)$. **780.** $x_n = a^{n-1}x_1 + b\,\frac{a^{n-1}-1}{a-1}$ при $a \neq 1$, $x_n = x_1 + (n-1)b$ при $a = 1$; $S_n = \frac{(n-1)b}{1-a} + \frac{ab(a^{n-1}-1)}{(1-a)^2} + \frac{1-a^n}{1-a}$ при $a \neq 1$, $S_n = \left(x_1 + \frac{(n-1)b}{2}\right)n$ при $a = 1$. **781.** $x_n = (n-1)x_2 - (n-2)x_1 + \frac{(n-2)(n-1)}{2}$. **782.** 1. **783.** $x_n = \frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}x_2 - \alpha\beta x_1\frac{\alpha^{n-2}-\beta^{n-2}}{\alpha-\beta}$. **784.** $\frac{2ab}{b-a}$ ч. **785.** 48 мин. **786.** 1040 г. **787.** 1 ч. **788.** $\frac{s}{2t}$ м/мин. **789.** 4 км. **790.** $\frac{15}{8}$. **791.** 7 км. **792.** $\frac{1}{6t}\left(4s - 3at + \sqrt{9a^2t^2+16s^2}\right)$. **793.** $\frac{4}{3}$. **794.** 27 %. **795.** 24 м³. **796.** 80 км/ч. **797.** 4 ч. **798.** 1 ч, $\frac{\sqrt{457}-7}{4}$ ч. **799.** 0,3 ч. **800.** $\frac{b+\sqrt{b^2+4ab}}{2}$ км. **801.** 4 ч 42 мин. **802.** 2 ч.

Практические и прикладные задачи

Глава I. **1.** 50 м³, 400 м³. **2.** $k = \sqrt[3]{\frac{1363}{961}} \approx 1{,}12$. **3.** $V \approx 100$ м³. **4.** 31,2 мм. **5.** $2 < d < 7{,}3$. **6.** $\sigma \approx 8 \cdot 10^8$ Н/м².

Глава II. 1. Рис. 19, A — см. рис. 20, *в*; рис. 19, B — см. рис. 20, *а*; рис. 19, C — см. рис. 20, *г*; рис. 19, D — см. рис. 20, *б*. 2. $y = \frac{80}{x}$. 3. $y = \frac{40}{n}$. 4. $y = \frac{0,8}{a}$.

Глава III. 1. 6 м; 22 500 р. 2. 496 м. 3. 9901 ящик. 4. $n_{12} = \sqrt{25\,000}$ оборотов в минуту. 5. Через 8 лет. 6. 1) 2, 3, 4; 2) 3, 4, 5; 3) 4, 5, 6 или 3, 5, 7; 4) 5, 6, 7 или 4, 6, 8. 7. Можно, если противоположными являются стороны a и $a+3d$; $a+d$ и $a+2d$. 8. 6 сторон. 9. Примерно 42 000 р. 10. Примерно 65 км/с, 130 км/с, 325 км/с, 650 км/с.

Глава IV. 1. $\frac{1}{64}$. 2. 1) $\frac{1}{1024}$; 2) $\frac{15}{1024}$. 3. $P \approx W = \frac{2}{3}$. В теории вероятностей доказывается, что вероятность этого события равна $\frac{2}{\pi}$. 4. $\frac{4}{7}$; второй по мастерству игрок занимает 2-е место лишь в том случае, когда он находится в той половине турнирной сетки, в которой нет лучшего игрока. 5. 1) $\frac{1}{1000}$; 2) $\frac{1}{10\,000}$. 6. $\frac{35}{69}$. 7. 1) 13 700; 2) 3420. 8. 1) Нет; 2) есть. 9. $\frac{1}{120}$.

Глава V.

3.

X	1	2	3	4	5	6	7	8
W	0,096	0,084	0,152	0,216	0,184	0,12	0,1	0,048

4. 0; 1; 1,1; 3; 1,09. 5. Точке A, так как $D_A < D_B$. 6. Прямая корреляция. 7. Обратная корреляция.

Глава VI. 2. 10. 3. 10. 4. 8. 5. 2. 6. 1) Числа, кратные 15; 2) числа, кратные 18. 7. 1) 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 33, 37, 41, 43, 47; 2) 3, 23, 43. 9. Верными являются лишь высказывания 1, 4, 7, 8, 10.

10. 1) $\begin{cases} y \leqslant \frac{x}{2} + 1, \\ y \geqslant 2x - 8, \\ y \geqslant 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y \leqslant x + 1, \\ y \geqslant 1, \\ x \leqslant 5, \\ (x-5)^2 + (y-3)^2 \geqslant 1. \end{cases}$ 11. 4 машины по 5 т и 6 машин по 10 т. 12. 1 единица корма I и 1,5 единицы корма II.

Проверь себя!

Глава I. 1. а) $8\frac{3}{8}$; б) 16; в) $1\frac{1}{5}$. 2. $8,6 \cdot 10^3$; $7,8 \cdot 10^{-3}$; $6,708 \cdot 10^1$; $1,1 \cdot 10^6$.

3. а) 6; б) $(y+x)xy$. 4. $a^{\frac{3}{4}}$; 27. 5. $(0,78)^{\frac{2}{3}} > (0,67)^{\frac{2}{3}}$; $(3,09)^{-\frac{1}{3}} < (3,08)^{-\frac{1}{3}}$.

6. а) 1; б) 15. **7.** $0{,}2 \cdot \sqrt[6]{(-5)^{18}} > 10\sqrt{\frac{1}{4}\sqrt[4]{625}}$. **8.** $b^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}}$; 0,4. **9.** $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{1}{3}$. **10.** $\frac{11}{54}$. **11.** $-5\sqrt{7}$. **12.** Значение выражения отрицательно. **13.** $\sqrt{2}\,(a+2)$.

Глава II. **1.** а) $x \neq 1$; б) $-3 \leqslant x \leqslant 3$. **2.** а) 1) $y \approx 1{,}4$; 2) $y = 3$; 3) $y = -2{,}5$; 4) $y = 8$; б) 1) $x = 9$; 2) $x = 2$; 3) $x = -\frac{5}{3}$; 4) $x \approx 1{,}4$; в) $y(x) > 0$ при: 1) $x > 0$; 2) $x > 0$; 3) $x < 0$; 4) $x > 0$; $y(x) < 0$ при: 1) нет таких промежутков; 2) $x < 0$; 3) $x > 0$; 4) $x < 0$; г) функция возрастает при: 1) $x \geqslant 0$; 2) нет таких промежутков; 3) $x > 0$, $x < 0$; 4) $x \in R$; функция убывает при: 1) нет таких промежутков; 2) $x > 0$, $x < 0$; 3) нет промежутков; 4) нет промежутков. **3.** а) Чётная; б) нечётная. **4.** а) $x \leqslant 3$; б) $-2 < x < 2$, $x \geqslant 7$. **5.** а) $x \neq 2$; б) $x < 2$, $x > 2$; в) $y > 0$ при $x < 2$; $y < 0$ при $x > 2$; г) $x_1 = 0$, $x_2 = 4$. **6.** а) Не является ни чётной, ни нечётной; б) нечетная; в) чётная. **7.** $0 < x < 9$, $x > 9$. **8.** а) $x = 28$; б) $x = 1$. **9.** а) $x < 9$; б) $x > -7$.

Глава III. **1.** 0, 1, 3. **2.** $a_{10} = -25$, $S_{10} = -115$. **3.** $b_6 = \frac{1}{8}$; $S_6 = 7\frac{7}{8}$. **4.** $q = \frac{1}{3}$, $S_5 = \frac{121}{81}$. **5.** $n = 3$. **6.** $S_{10} = 115$. **7.** $S_3 = 1\frac{1}{6}$. **8.** $x_1 = 25$, $x_2 = 1$. **9.** Не является. **10.** $a_1 = -1$ или $a_1 = 3{,}75$. **11.** $b_1 = 3{,}5$, $q = -2$. **12.** $q = -2$.

Глава IV. **1.** а) $\frac{1}{5}$; б) $\frac{3}{10}$; в) $\frac{1}{2}$; г) $\frac{4}{5}$. **2.** $\frac{1}{18}$. **3.** 0,18. **4.** а) $\frac{10}{21}$; б) $\frac{1}{21}$; в) $\frac{10}{21}$. **5.** а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{11}{36}$. **6.** 0,288. **7.** а) 0,8; б) $\frac{8}{15}$. **8.** а) $\frac{1}{36}$; г) $\frac{7}{8}$. **9.** 0,63.

Глава V. **1.**

X	2	3	4	5
M	3	7	8	2
W	$\frac{3}{20}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$

2. $R = 10$, $\overline{Y} = Mo = Me = 3$. **3.** 4; 4; 3,8; 4. **4.** 6. **5.** Три пути ведут к знанию: путь размышлений — самый благородный, путь подражания — самый лёгкий и путь опыта — самый горький. (Конфуций) **6.** Обратная. **7.** 1,87.

Глава VI. **1.** а) $\{-2; -1; 0; 1; 2; 3\}$, $\{0; 1\}$; б) $[-7; 2]$, $[-3; 1]$. **2.** а) $100 \leqslant 32$, число 3 не является чётным. **3.** $(x+2)^2 + (y-5)^2 = 49$. **4.** $\sqrt{13}$. **6.** а) $\{-7; -5; 0; 2\}$; $\{2\}$; б) $[-3; 5)$; $(0; 4]$. **7.** $(-2; 2] \cup [3; 5)$. **8.** а) $23 > 10$; б) прямые a и b не перпендикулярны. **9.** $C(-1; 4)$. **11.** $(-\infty; 4) \cup [5; +\infty)$; $(-3; 2]$. **12.** Если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны, то эти прямые параллельны. **13.** Две точки. **14.** 64. **15.** $(-\infty; 2) \cup (2; 4)$.

Предметный указатель

Арифметическая прогрессия 85
Арифметический корень натуральной степени 12

Вероятность события 127
Выборка 180
— репрезентативная 180

Геометрическая прогрессия 97
График функции 44
Гипербола 60
Генеральная совокупность 180

Дисперсия 196

Испытания Бернулли 146

Медиана 188
Множество 210
Мода 188

Область определения функции 43
Объединение множеств 213
Относительная частота события 149

Пересечение множеств 213
Полигон частот 175
Последовательность числовая 78
Прогрессия арифметическая 85
— геометрическая 97

Размах 194
Равносильность 230

Свойства степени с целым показателем 6
— арифметического корня n-й степени 17
— возведения в степень неравенств 29
Следование 229
Сложение вероятностей 140
Среднее значение 189
Степень с отрицательным показателем 5
— с нулевым показателем 5

Таблица распределения значений случайной величины 166
Теорема о сумме n членов арифметической прогрессии 91
— о сумме n членов геометрической прогрессии 105

Умножение вероятностей 142
Уравнение прямой 242
— окружности 239

Формула n-го члена арифметической прогрессии 86
— n-го члена геометрической прогрессии 98
— рекуррентная 80
Функция 43
— степенная 48
— возрастающая на промежутке 49
— убывающая на промежутке 49
— чётная 54
— нечётная 55
— $y = \frac{k}{x}$ 59
— $y = \sqrt{x}$ 49
— $y = x^3$ 54
— $y = \sqrt[3]{x}$ 55

Оглавление

ГЛАВА I. СТЕПЕНЬ С РАЦИОНАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ 4

§ 1. Степень с целым показателем 5

§ 2. Арифметический корень натуральной степени 11

§ 3. Свойства арифметического корня 16

§ 4. Степень с рациональным показателем 21

§ 5. Возведение в степень числового неравенства 29

Упражнения к главе I 35

ГЛАВА II. СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ 41

§ 6. Область определения функции 42

§ 7. Возрастание и убывание функции 48

§ 8. Чётность и нечётность функции 53

§ 9. Функция $y = \frac{k}{x}$ 59

§ 10. Неравенства и уравнения, содержащие степень 66

Упражнения к главе II 72

ГЛАВА III. ПРОГРЕССИИ 77

§ 11. Числовая последовательность 78

§ 12. Арифметическая прогрессия 89

§ 13. Сумма первых n членов арифметической прогрессии 90

§ 14. Геометрическая прогрессия 96

§ 15. Сумма первых n членов геометрической прогрессии 105

Упражнения к главе III 109

ГЛАВА IV. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ 117

§ 16. События 119

§ 17. Вероятность события 125

§ 18. Решение вероятностных задач с помощью комбинаторики 133

§ 19. Сложение и умножение вероятностей 140

§ 20. Относительная частота и закон больших чисел 148

Упражнения к главе IV 157

ГЛАВА V. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ 163
§ 21. Таблицы распределения 164
§ 22. Полигоны частот 173
§ 23. Генеральная совокупность и выборка 180
§ 24. Центральные тенденции 187
§ 25. Меры разброса 194
Упражнения к главе V 202

ГЛАВА VI. МНОЖЕСТВА. ЛОГИКА 209
§ 26. Множества 210
§ 27. Высказывания. Теоремы 219
§ 28. Следование и равносильность 229
§ 29. Уравнение окружности 237
§ 30. Уравнение прямой 242
§ 31. Множества точек на координатной плоскости 247
Упражнения к главе VI 256

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ КУРСА АЛГЕБРЫ IX КЛАССА 265

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ КУРСА АЛГЕБРЫ VII—IX КЛАССОВ 269

ЗАДАЧИ ПОВЫШЕННОЙ ТРУДНОСТИ 290

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ ПО КУРСУ АЛГЕБРЫ VII—IX КЛАССОВ 299

ОТВЕТЫ 319

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ 333

Учебное издание

Колягин Юрий Михайлович
Ткачёва Мария Владимировна
Фёдорова Надежда Евгеньевна
Шабунин Михаил Иванович

АЛГЕБРА

9 класс

Учебник для общеобразовательных организаций

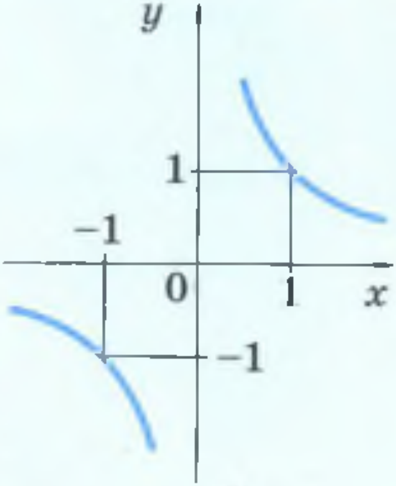
Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *Н. Н. Сорокина*
Младшие редакторы *Е. А. Андреенкова, Е. В. Трошко*
Художественный редактор *О. П. Богомолова*
Технический редактор и верстальщик *Е. В. Саватеева*
Корректор *М. А. Терентьева*
Компьютерная графика *Кергелен К. В., Тупикина О. Ю.*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать с оригинал-макета 13.06.13. Формат 70×90 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 19,29. Тираж 10 000 экз. Заказ № 35503 (п-гз).

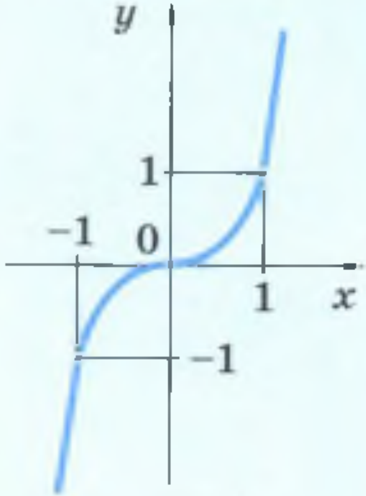
Открытое акционерное общество «Издательство «Просвещение». 127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано в филиале «Смоленский полиграфический комбинат» ОАО «Издательство «Высшая школа»
214020, Смоленск, ул. Смольянинова, 1.
Тел.: +7(4812) 31-11-96. Факс: +7(4812) 31-31-70
E-mail: spk@smolpk.ru http://www.smolpk.ru

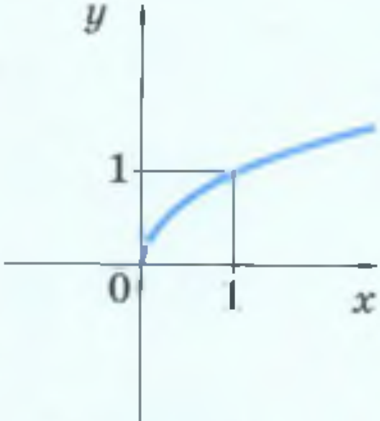
Графики функций



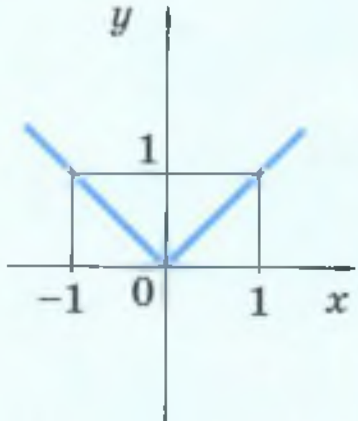
$y = \dfrac{1}{x}$



$y = x^3$



$y = \sqrt{x}$



$y = |x|$

Модуль числа a

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \geqslant 0 \\ -a, \text{ если } a < 0 \end{cases}$$

Формулы сокращённого умножения

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$